

受 験 番 号

--

令和 8 年度専攻科入学試験学力検査問題(前期)

一 般 科 目 (数 学)

注 意 事 項

1. 検査開始の合図まで、この問題（解答）用紙を開いてはいけません。
2. 問題冊子の総枚数はこの表紙を含め 4 枚です。
3. 落丁、乱丁及び印刷不鮮明の箇所等があれば、直ちに申し出てください。
4. 問題冊子の所定の箇所に受験番号を記入してください。
5. 解答は、問題（解答）用紙の所定の欄に記入してください。
6. 問題（解答）用紙の総得点欄、小計欄及び得点欄には記入しないでください。
7. 検査開始後、20 分は退室を許可しません。

--

--

一般科目数学 (1/3)

--

1 次の各問いに答えなさい。【72点】

(1) 微分方程式 $y^{(3)} - 3y' - 2y = 0$ の一般解を求めなさい。(8点)

$$t^3 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = -1, t = 2$$

より, 一般解は

$$y = (A + Bx)e^{-x} + Ce^{2x} \quad (A, B, C \text{ は任意定数})$$

--

(2) 掃き出し法を用いて, 連立方程式 $\begin{cases} x+y=-1 \\ y+z=1 \\ x+z=4 \end{cases}$ を解きなさい。(10点)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

よって, 求める解は

$$x = 1, y = -2, z = 3$$

--

(3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ を計算しなさい。(8点)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x}{1+\cos^2 2x} dx$$

$$t = \cos 2x \text{ とおくと, } \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt \text{ より,}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = -\int_1^0 \frac{1}{1+t^2} dx = \left[\tan^{-1} t \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

--

(4) 関数 $y = x^3 \log x$ の変曲点を求めなさい。(10点)

$$y' = 3x^2 \log x + x^2, \quad y'' = x(6 \log x + 5) \text{ より } y'' = 0 \text{ のとき } \log x = -\frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$$

増減表は

x	$+0$	$\dots$	$1/\sqrt[6]{e^5}$	$\dots$
y''		$-$	0	$+$
y			$-\frac{5}{6e^2\sqrt{e}}$	

増減表より変曲点は

$$\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}, -\frac{5}{6e^2\sqrt{e}} \right)$$

--

--

令和8年度専攻科入学試験学力検査問題(前期)

小計

--

一般科目数学 (2/3)

- (5) 2変数関数 $z = f(x, y) = e^{3x} \sin 2y$ の $(x, y) \doteq (0, 0)$ における, 2次近似式を求めなさい。(12点)

$$f_x(x, y) = 3e^{3x} \sin 2y, f_y(x, y) = 2e^{3x} \cos 2y$$

$$f_{xx}(x, y) = 9e^{3x} \sin 2y, f_{xy}(x, y) = 6e^{3x} \cos 2y, f_{yy}(x, y) = -4e^{3x} \sin 2y$$

より

$$f(0, 0) = 0, f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 2$$

$$f_{xx}(0, 0) = 0, f_{xy}(0, 0) = 6, f_{yy}(0, 0) = 0$$

よって, 求める2次近似式は

$$f(x, y) \doteq 2y + 6xy$$

得点

--

- (6) 領域 $D: \{(x, y) \mid 0 < x + y < 1, 0 < x - y < \pi\}$ 上での2重積分 $\iint_D e^{x+y} \sin(x-y) dx dy$ の値を求めなさい。(12点)

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \text{ とおくと } \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}, \text{ このとき領域は } D: \{(u, v) \mid 0 < u < 1, 0 < v < \pi\}$$

ヤコビアンは

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

よって

$$\iint_D e^{x+y} \sin(x-y) dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^\pi e^u \sin v \left| -\frac{1}{2} \right| dv \right\} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ [-e^u \cos v]_0^\pi \right\} du = \int_0^1 e^u du = [e^u]_0^1 = e - 1$$

得点

--

- (7) 微分方程式 $xyy' = x^2 + y^2$ の一般解を求めなさい。ただし, $x \neq 0, y \neq 0$ とする。(12点)

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ と書き直せるので, 同次形. } u = \frac{y}{x} \text{ とおくと, } y' = u + xu' \text{ より}$$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow u + xu' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int u du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} u^2 = \log|x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^2 = \log|x| + C$$

得点

--

--

令和8年度専攻科入学試験学力検査問題(前期)

一般科目数学 (3/3)

小計

--

2 次の各問いに答えなさい。【28点】

(1) 半径 $a(a > 0)$ の球の表面積の公式 $S = 4\pi a^2$ を、2重積分を用いて導きなさい。(12点)

半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $D: \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\}$ の表面積の2倍を求めれば良い。

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \Rightarrow 1 + (z_x)^2 + (z_y)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}$$

より

$$S = 2 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \right\} d\theta = 4\pi a \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 4\pi a \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^a = 4\pi a^2$$

得点

--

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えなさい。

i) 行列 A の固有値を求めなさい。(6点)

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 4+\lambda & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(4+\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda+3)(\lambda+4) = 0 \end{aligned}$$

固有値は

$$\lambda = 0, -3, -4$$

得点

--

ii) 行列 A は対称行列であるので、固有ベクトルは互いに直交する。行列 A の各固有値に対する固有ベクトルを求め、固有ベクトルが互いに直交することを示しなさい。(10点)

$\lambda = 0$ のとき

$\lambda = -3$ のとき

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -4$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 \text{ は } 0 \text{ でない任意定数。}$$

ここで、

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1 = 0$$

より、固有ベクトルは互いに直交する。

得点

--