

解答

この時間の目標

- 【態度目標】 質問する, 説明する.
- 【内容目標】 (理解すること)
  - 不等号の意味を理解し, 正確に使える
  - 1次不等式を解くことができる
  - 連立1次不等式を解くことができる

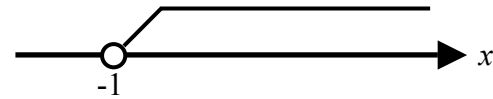
確認: 不等号について:  $<$ ,  $>$  と  $\leq$ ,  $\geq$  との違いについて

不等号	使い方の例	意味
$<$	$A < B$	$A$ は $B$ より小さい ( $A$ は $B$ 未満)
$>$	$A > B$	$A$ は $B$ より大きい
$\leq$	$A \leq B$	$A$ は $B$ 以下
$\geq$	$A \geq B$	$A$ は $B$ 以上

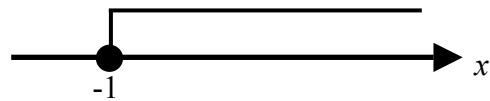
$<$ ,  $>$ : 境界 (境目) の値を含まない.  $\leq$ ,  $\geq$ : 境界 (境目) の値を含む.

Example

$x > -1$  で表される  $x$  の範囲には  $-1$  は含まれない. 数直線で表すと



$x \geq -1$  で表される  $x$  の範囲には  $-1$  は含まれる. 数直線で表すと



Example

(1) 「ある数  $x$  の3倍から5を引いた数は10より小さい」を不等号を用いて表すと

\_\_\_\_\_  $3x - 5 < 10$  \_\_\_\_\_

(2) 「2数  $a, b$  の和は0以上である」を不等号を用いて表すと \_\_\_\_\_  $a + b \geq 0$  \_\_\_\_\_

□□□ 1次不等式 □□□

《 定義: 不等式の解 》

○未知数  $x$  を含む不等式があるとき, その不等式を満たす  $x$  の値を, 不等式の解 という.

○不等式のすべての解 (  $x$  の範囲 ) を求めることを, 不等式の解く という.

【定理: 不等式の基本性質1】

(0)  $\cdot a > b \Leftrightarrow a - b > 0$      $\cdot \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow ab > 0$      $\cdot \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow ab < 0$      $\cdot \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow ab > 0$

(1)  $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$     (2)  $a > b \Rightarrow a + c > b + c, a - c > b - c$

(3)  $\begin{cases} a > b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$     (4)  $\begin{cases} a > b \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

証明

(1)  $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ b - c > 0 \end{cases} \Rightarrow (\text{正}) + (\text{正}) \text{は} (\text{正}) \text{だから} (a - b) + (b - c) > 0 \Rightarrow a - c > 0 \Rightarrow a > c.$

(2)  $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow (a + c) - (b + c) > 0 \Rightarrow a + c > b + c,$   
 $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow (a - c) - (b - c) > 0 \Rightarrow a - c > b - c$

(3)  $\begin{cases} a > b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - b) \cdot c > 0 \Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow ac > bc,$

$\begin{cases} a > b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a - b}{c} > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} - \frac{b}{c} > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(4)  $\begin{cases} a > b \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow (a - b) \cdot c < 0 \Rightarrow ac - bc < 0 \Rightarrow ac < bc,$

$\begin{cases} a > b \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a - b}{c} < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} - \frac{b}{c} < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Exercise 上の定理で用いられている  $\Rightarrow$  と  $\Leftrightarrow$  の意味について答えなさい.

$\Rightarrow$ : \_\_\_\_\_

$\Leftrightarrow$ : \_\_\_\_\_

この定理の性質を利用して, 不等式の解き方をまとめると, 次のようになる.

【 1次不等式の解法 】

(1) 両辺を何倍かしたり, 移項したりして, 左辺に  $x$  を含む項を, 右辺に定数を集め,  $ax > b$  あるいは  $ax < b$  の形に変形する.

(2) 両辺を  $a$  で割って, 解  $x > \frac{b}{a}$  あるいは  $x < \frac{b}{a}$  を得る.

注意! 両辺を負の数倍するときや負の数で割るときは, 不等号の向きが \_\_\_\_\_ になる!

Example 12. 不等式  $\frac{3x - 7}{5} > x - 1$  を解きなさい.

解答

両辺を5倍して

$3x - 7 > 5x - 5$  ← 正の数を両辺に掛けているので不等号の向きは変わらない

移項して

$-2x > 2$

両辺を  $-2$  で割って,

$x < -1$  ← 負の数 で両辺を割っているため不等号の向きが逆になる

□□□ 連立1次不等式 □□□

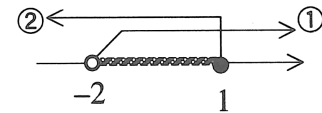
連立不等式を解くには、それぞれの不等式を解いて、その両方が成り立つ範囲を求めればよい。

Example 13. 連立不等式  $\begin{cases} 3x-1 < 5x+3 \\ 4x+1 \leq 2x+3 \end{cases}$  を解きなさい。

**解答** それぞれの式を上から順に ①, ②と置く。

① より  $3x-1 < 5x+3 \Rightarrow -2x < 4 \Rightarrow x > -2$ ,

② より  $4x+1 \leq 2x+3 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$ .



両方を満たす  $x$  の範囲は、右の図より、 $-2 < x \leq 1$ である。

☆☆☆ 演習問題 ☆☆☆

Exercise 12. 次の不等式を解きなさい。

(1)  $2(x+2) > 3x-3$   
 $2x+4 > 3x-3$   
 移項して  
 $-x > -7$   
 両辺を  $-1$  で割って、  
 $x < 7$

(2)  $\frac{3x-11}{6} > -\frac{2x-5}{3}$   
 両辺を 6 倍して  
 $3x-11 > -2(2x-5) \Leftrightarrow 3x-11 > -4x+10$   
 移項して  
 $7x > 21$   
 両辺を 7 で割って、  
 $x > 3$

(3)  $\frac{t-1}{3} + 2 < \frac{t+3}{2}$   
 両辺を 6 倍して  
 $2(t-1)+12 < 3(t+3) \Leftrightarrow 2t+10 < 3t+9$   
 移項して  
 $-t < -1$   
 両辺を  $-1$  で割って、  
 $t > 1$

Exercise 13. 次の連立不等式を解きなさい。

(1)  $\begin{cases} x+1 < 2x+2 \\ 3x-3 < 4x-4 \end{cases}$

それぞれの式を上から順に ①, ②と置く。

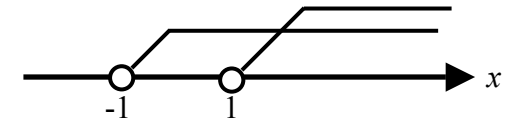
① より

$x+1 < 2x+2 \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow x > -1$

② より

$3x-3 < 4x-4 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow x > 1$

両方を満たす  $x$  の範囲は、右の図より、 $x > 1$



(2)  $\begin{cases} t-1 < 2t \\ -t < 3t+1 \end{cases}$

それぞれの式を上から順に ①, ②と置く。

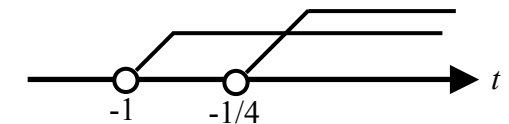
① より

$t-1 < 2t \Rightarrow -t < 1 \Rightarrow t > -1$

② より

$-t < 3t+1 \Rightarrow -4t < 1 \Rightarrow t > -\frac{1}{4}$

両方を満たす  $x$  の範囲は、右の図より、 $t > -\frac{1}{4}$



(3)  $x+1 \leq -2x+2 \leq 3x+3$

$x+1 \leq -2x+2 \leq 3x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq -2x+2 \\ -2x+2 \leq 3x+3 \end{cases}$

それぞれの式を上から順に ①, ②と置く。

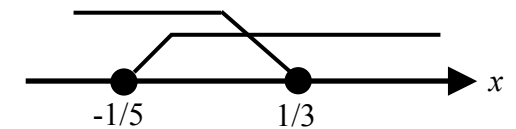
① より

$x+1 \leq -2x+2 \Rightarrow 3x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

② より

$-2x+2 \leq 3x+3 \Rightarrow -5x \leq 1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{5}$

両方を満たす  $x$  の範囲は、右の図より、 $-\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{3}$



Exercise 14. 次の計算をしなさい。

(1)  $\sqrt{18} - \sqrt{72} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

(2)  $3\sqrt{3} + \sqrt{48} - 2\sqrt{\frac{27}{4}} = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(3)  $(\sqrt{2}+3)(2\sqrt{8}-3) = (\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3)$   
 $= 8 - 3\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 9 = 9\sqrt{2} - 1$

(4)  $(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$   
 $= (1+2\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2$   
 $= 1 + 4\sqrt{2} + 8 - 27 = 4\sqrt{2} - 18$