解答

この時間の目標

1．【態度目標】　質問する，説明する．

2．【内容目標】（理解すること）

□ 定義と定理の違いが分かる

□ 整数の指数を理解し，その計算ができる

□ 拡張された指数法則を理解し計算ができる

□ 正の数の表現を理解し計算ができる

確認（復習）

◎それぞれどのような数であるか書きなさい．

自然数：$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 物の数を数える数

整数：自然数に０と負の数 $-1, -2, -3, -4, -5, \cdots$ を加えた数

有理数：$\dfrac{n}{m}$ $(m, n$：整数，$m \neq 0)$ の形で表される数

無理数：有理数でない数

実数：有理数と無理数を合わせた数

定義と定理の違いは？

定義：記号・言葉等の約束事

定理：定義から導かれるもの（証明がセット）

□□□　整数の指数・拡張された指数法則　□□□

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ が整数の指数についても成り立つとすると，

$a \times a^0 \left(= a^{1+0}\right) = a$ であるから，両辺を a で割ると $a^0 = 1$ となる．

$a^n \times a^{-n} \left(= a^{n+(-n)} = a^0\right) = 1$ であるから，両辺を a^n で割ると $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ となる．

《定義：整数の指数》

a を正の実数，n を 自然数 とするとき，　(0)　$a^0 = 1$，$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ と定義する．

Example　次の数を計算しなさい．

(1)　$7^0 = 1$

(2)　$3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$

(3)　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

【定理：指数法則】

a，b を正の実数，m，n を＿＿＿＿とすると，次が成り立つ．　(0)　$a^{-n} =$ ＿＿＿

(1)　$a^m \times a^n = a^{m+n}$，　$a^m \div a^n = a^{m-n}$

(2)　$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

(3)　$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Example　次の式を $a^m b^n$ の形に直しなさい．

(1)　$\left(a^2 \cdot b^{-1}\right)^4 \times \left(a^{-6} \cdot b^2\right)^2 = a^8 \cdot b^{-4} \times a^{-12} \cdot b^4$
$= a^{8-12} \cdot b^{-4+4}$
$= a^{-4} \cdot b^0$
$= a^{-4}$

(2)　$\left(a^2 \cdot b^{-1}\right)^{-4} \div \left(a^{-6}\right)^2 = a^{-8} \cdot b^4 \div \left(a^{-12}\right)$
$= a^{-8-(-12)} \cdot b^4$
$= a^4 \cdot b^4$

□□□　正の数の表現　□□□

☞正の数を $a \times 10^n$ の形に表す．

前述の指数表現を用いると，たとえば $1000000 = 10^6$，$0.0000001 = \dfrac{1}{10000000} = \dfrac{1}{10^7} = 10^{-7}$ である．

したがって，正の数は，たとえば

$123000 = 1.23 \times 100000 = 1.23 \times 10^5$，　$0.00456 = 4.56 \times 0.001 = 4.56 \times 10^{-3}$

のように表すことができる．すなわち，次の定理が成り立つ．

【定理：正の数の表現】

正の数は $a \times 10^n$，（n は整数，$1 \leq a < 10$）の形に表せる．

Example　0.0021×1100000 の計算結果を $a \times 10^n$，（n は整数，$1 \leq a < 10$）の形で表しなさい．

$0.0021 \times 1100000 = 2.1 \times 0.001 \times 1.1 \times 1000000$
$= 2.1 \times 10^{-3} \times 1.1 \times 10^6$
$= 2.1 \times 1.1 \times 10^{-3} \times 10^6$
$= 2.31 \times 10^{-3+6}$
$= 2.31 \times 10^3$

Example 4.　地球の半径を 6400 km とし，エベレスト山の高さを 8000 m とする．半径 20 cm の地球の模型を作ると，模型でのエベレスト山の高さは何 cm になるか答えなさい．

求める高さを x cm とすると，実物と模型の比より

6400 km : 8000 m = 20 cm : x cm

単位を cm にそろえると，

6400 km ＝ $6400 \times 1000 \times 100$ cm ＝ 64×10^7 cm : x cm,

ここで

8000 m ＝ 8000×100 cm ＝ 8×10^5 cm

だから，

$64 \times 10^7 : 8 \times 10^5 = 20 : x \Rightarrow 64 \times 10^7 \times x = 8 \times 10^5 \times 20$

より，

$x = \dfrac{8 \times 10^5 \times 20}{64 \times 10^7} = \dfrac{16}{640} = 0.025 = 2.5 \times 10^{-2}$ cm

☆☆☆　演習問題　☆☆☆

Exercise 1.　次の数を計算しなさい．

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$　　(2) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$　　(3) $1000^0 = 1$　　(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81$

Exercise 2.　次の式を $a^m b^n \cdots$ の形に直しなさい．

(1) $a^3 \times a^{-4} \div a^2 = a^{3-4-2} = a^{-3}$

(2)
$$\left(a^{-5}b^2\right)^3 \times \left(a^6 b^{-3}\right)^2 \div \left(a^4\right)^{-3} = a^{-15}b^6 \times a^{12}b^{-6} \div \left(a^{-12}\right)$$
$$= a^{-15}b^6 \times a^{12}b^{-6} \times a^{12}$$
$$= a^{-15+12+12}b^{6-6}$$
$$= a^9 b^0 = a^9$$

(3)
$$15a^2b^3c \div \left(-5abc^2\right)^2 = 15a^2b^3c \div \left(25a^2b^2c^4\right)$$
$$= \frac{15}{25}a^2b^3c \times a^{-2}b^{-2}c^{-4}$$
$$= \frac{3}{5}a^{2-2}b^{3-2}c^{1-4}$$
$$= \frac{3}{5}a^0b^1c^{-3}$$
$$= \frac{3}{5}bc^{-3}$$

(4)
$$\left(\frac{2x^3}{y}\right)^{-3} \div \frac{(-3y)^3}{4xy^2} \times \frac{3x^2}{y^2} = \frac{2^{-3}x^{-9}}{y^{-3}} \div \frac{-27y^3}{4xy^2} \times \frac{3x^2}{y^2}$$
$$= \frac{2^{-3}x^{-9}}{y^{-3}} \times \frac{4xy^2}{-27y^3} \times \frac{3x^2}{y^2}$$
$$= \frac{2^{-3}x^{-9}}{1} \times \frac{4x}{-9} \times \frac{x^2}{1}$$
$$= -\frac{1}{18}x^{-6}$$

Exercise 3.　次の計算結果を $a \times 10^n$，（n は整数，$1 \le a < 10$）の形で表しなさい．

(1)
$$0.00012 \times 0.0034 = 1.2 \times 10^{-4} \times 3.4 \times 10^{-3}$$
$$= 1.2 \times 3.4 \times 10^{-4} \times 10^{-3}$$
$$= 4.08 \times 10^{-7}$$

(2)
$$0.025 \times 0.00025 = 2.5 \times 10^{-2} \times 2.5 \times 10^{-4}$$
$$= 2.5 \times 2.5 \times 10^{-2} \times 10^{-4}$$
$$= 6.25 \times 10^{-6}$$

(3)
$$\left(3.2 \times 10^4\right) \div \left(1.28 \times 10^6\right) = \frac{3.2}{1.28} \times 10^4 \times 10^{-6}$$
$$= 2.5 \times 10^{-2}$$

(4)
$$\left(6.5 \times 10^5\right) \div 1300000 = \left(6.5 \times 10^5\right) \div \left(1.3 \times 10^6\right)$$
$$= \frac{6.5}{1.3} \times 10^5 \times 10^{-6}$$
$$= 5 \times 10^{-1}$$

Exercise 4.　次の各問いに答えなさい．

(1)　数の単位で，12 個を 1 ダース，6×10^{23} 個を 1 モルと呼ぶことにする．1 モルは何ダースか？

$$\left(6 \times 10^{23}\right) \div 12 = \frac{6}{12} \times 10^{23} = 0.5 \times 10^{23} = 5 \times 10^{22} \text{ ダース}$$

(2)　光の進む速さは，毎秒 3.0×10^8 m である．光は 1 km を約何秒で進むか答えなさい．また，光は 365 日の間に約何 km 進むか求めなさい．

$$1\ km \div \left(3.0 \times 10^8\ m/s\right) = 1.0 \times 10^3 m \div \left(3.0 \times 10^8\ m/s\right)$$
$$= \frac{1.0}{3.0} \times 10^3 \times 10^{-8}\ s$$
$$= 0.33 \times 10^{-5}\ s$$
$$= 3.3 \times 10^{-6}\ s$$

$$365\ day = 3.65 \times 10^2\ day$$
$$= 3.65 \times 10^2 \times 24\ h$$
$$= 3.65 \times 10^2 \times 24 \times 60 \times 60\ s$$
$$= 3.65 \times 10^2 \times 86400\ s$$
$$= 3.65 \times 10^2 \times 8.64 \times 10^4\ s$$
$$= 31.536 \times 10^6\ s = 3.1536 \times 10^7\ s$$

$\Rightarrow$

$$3.0 \times 10^8\ m/s \times 3.1536 \times 10^7\ s$$
$$= 3.0 \times 3.1536 \times 10^8 \times 10^7\ m$$
$$= 9.4608 \times 10^{15}\ m$$
$$= 9.4608 \times 10^{12}\ km$$

(3)　日本の人口を 1 億 2 千 5 百万人とし，日本人は 1 日に 1 人平均 10 枚のティッシュペーパーを使うとする．また，ティッシュペーパーは 400 枚で 100 円とする．このとき，日本で 1 日に消費されるティッシュペーパーの金額はいくらか？

1 億 2 千 5 百万人 $= 1.25 \times 10^8$ 人
$\Rightarrow 1.25 \times 10^8 \times 10 = 1.25 \times 10^9$ 枚
$\Rightarrow \frac{100}{400} \times 1.25 \times 10^9 = 0.3125 \times 10^9 = 3.125 \times 10^8$ 円

※　各種定数

電子の質量　$9.1 \times 10^{-31}\ kg$，　電子の電荷　$-1.6 \times 10^{-19}\ C$
陽子の質量　$1.67 \times 10^{-27}\ kg$，　陽子の電荷　$1.6 \times 10^{-19}\ C$
太陽の質量　$1.9891 \times 10^{30}\ kg$，　太陽の体積　$1.409 \times 10^{18}\ km^3$