解答

この時間の目標

1．【態度目標】　質問する，説明する．
2．【内容目標】（理解すること）
□ 平方根・ルートの定義を理解し，正確に使える
□ 分母の有理化（分母にルートが２個）ができる
□ ２重根号をはずせる

□□□　ルート記号の定義と公式　□□□

《 定義：平方根，ルート 》

○ *aの平方根* ･･･ *２乗してaになる数（aは正の数）*● *aの平方根* *は，正のものと負のものの２つある．*

○ $\sqrt{a}$ ･･･ *aの平方根のうち，* *正の方．*　　● *aの平方根は* $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$．

【定理：ルート記号の付いた数の公式】
a，b，k が正の数のとき，次が成り立つ．

(0) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$，$\sqrt{a^2} = a$　(1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$　(2) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$　(3) $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$

証明
(1)の証明

（左辺の２乗）$=\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$，　（右辺の２乗）$=\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$

よって，(1)の両辺は共に２乗するとabになる正の数．したがって(1)が成り立つ．

☆ルート記号の付いた数の計算のポイントは？

ルート記号の中の数をなるべく小さな数に直す

Example 14．次の計算をしなさい．

(1) $\sqrt{12}\times\sqrt{28}+2\sqrt{14}\times\sqrt{6}-4\sqrt{21} = 2\sqrt{3}\times2\sqrt{7}+2\sqrt{84}-4\sqrt{21}$
$$= 4\sqrt{21}+2\cdot 2\sqrt{21}-4\sqrt{21}$$
$$= 4\sqrt{21}$$

(2) $\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right) = 15\sqrt{6}+6\cdot 3-15\cdot 2-6\sqrt{6} = -12+9\sqrt{6}$

□□□　ルート記号の付いた数の商（分母の有理化）　□□□

分母にルートを１個含む分数は，分子分母に 分母と同じ数 をかけて分母の有理化ができた．

☆分母にルートを２個含む分数は分子分母にどのような数をかけると分母の有理化ができるのか？

分母に含まれるルートを全て$\left(\sqrt{a}\right)^2$の形にできればルート記号が消える

⇒ 中学校で学んだ公式 $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ を応用すれば良い！

Example 15．次の分数の分母を有理化しなさい．

(2) $\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
$$= \frac{\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{3\cdot 2+\sqrt{6}+6\sqrt{6}+2\cdot 3}{9\cdot 2-3} = \frac{12+7\sqrt{6}}{15}$$

□□□　２重根号　□□□

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ は，ルートの定義から言うと，２乗して $5+2\sqrt{6}$ になる正の数である．
一方，$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ を２乗してみると，$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 = 3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2 = 5+2\sqrt{6}$ であるから，
$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ が２乗して $5+2\sqrt{6}$ になる正の数である．
ということは，$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ は，実は$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ のことなのである！

$\boxed{\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}}$

この例と同様の考え方で，$a>b>0$ のとき，次のことがわかる．
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ は正の数であり，２乗すると，$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b = (a+b)+2\sqrt{ab}$ である．
よって，$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ である．
同様に，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$，$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = (a+b)-2\sqrt{ab}$ より，$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ がいえる

※ $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ も２乗して $(a+b)-2\sqrt{ab}$ になるが，負の数だから$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} \neq \sqrt{b}-\sqrt{a}$である．

【定理：２重根号】
$a>b>0$ のとき，次が成り立つ．

● $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$　　● $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

※ この定理は，$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$ の形の数を $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ の形に直すものである．
この定理の式の形から，２重根号をはずすときは，

❶ 内側のルートの前を２にし，
❷ $\begin{cases} a+b=A \\ ab=B \end{cases}$ となる２つの数 $a,b,(;a>b>0)$ を求めて，
❸ $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ とすればよいことがわかる．

$\sqrt{A'\pm\sqrt{B'}}$
↓
$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$
↓ $\begin{cases} a+b=A \\ ab=B \end{cases}$，$(;a>b>0)$
$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

※ $a>b>0$のとき，$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} \neq \sqrt{b}-\sqrt{a}$ であった．
したがって，結果を書くときはa,bのうち大きいほうから書くよう心がけよう．

※ もちろん，２重根号をはずせない数もある．たとえば，$\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ など．

基礎解析学　プリント　No.04　　提出日

P14~ルート記号の付いた数・２重根号　Class　No.　Name

Example 15. 次の２重根号をはずしなさい.

(1) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}$

$=\sqrt{(9+3)-2\sqrt{9\cdot 3}}=\sqrt{\left(\sqrt{9}\right)^2-2\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{9}-\sqrt{3}\right)^2}$

$=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$

↑
必ず３に直すこと！

(2) $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(5+1)+2\sqrt{5\cdot 1}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}+\left(\sqrt{1}\right)^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{1}\right)^2}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$

(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

☆☆☆　演習問題　☆☆☆

Exercise 15.　次の分数の分母を有理化しなさい.

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(2) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{10+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}+3}{25-3}=\dfrac{13+7\sqrt{3}}{22}$

(3) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{18+6\sqrt{6}+3}{18-3}=\dfrac{21+6\sqrt{6}}{15}=\dfrac{7+2\sqrt{6}}{5}$

Exercise 16.　次の２重根号をはずしなさい.

(1) $\sqrt{15-2\sqrt{50}}=\sqrt{(10+5)-2\sqrt{10\cdot 5}}=\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-2\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{10}-\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{9+\sqrt{80}}=\sqrt{9+2\sqrt{20}}$

$=\sqrt{(5+4)+2\sqrt{5\cdot 4}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}+\left(\sqrt{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{4}\right)^2}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{4}=\sqrt{5}+2$

↑必ず２に直すこと！

(3) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\cdot 3}}=\sqrt{\left(\sqrt{4}\right)^2-2\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)^2}$

$=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

↑
必ず２に直すこと！

(4) $\sqrt{14+3\sqrt{3}}=\sqrt{14+\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{28+2\sqrt{27}}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{(27+1)+2\sqrt{27\cdot 1}}{2}}=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{27}\right)^2+2\sqrt{27}\cdot\sqrt{1}+\left(\sqrt{1}\right)^2}{2}}=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{27}+\sqrt{1}\right)^2}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　最後に分母の有理化を忘れない！