

# 有明工業高等専門学校紀要

第 5 号

昭和 44 年 12 月

Research Reports  
of the  
Ariake Technical College  
No. 5

December 1969

Published by the Ariake Technical College  
Omuta, Japan

## 目 次

学校保健の一考察 .....	寺本匡謨	1
線型ノルム空間に於ける原点と超平面の距離公式の一つの証明 .....	井上盟朗	11
再帰理論の機械故障問題への一応用 .....	井上盟朗	13
根軌跡の数値解法(其のⅡ) .....	木村剛三 大山司朗	19
格子熱伝導度の理論計算 .....	永田達郎 石崎勝典	23
送風機吸込側流れの実験的研究(その3) .....	清森宏之助	51
軟鋼丸棒の回転曲げ疲れき裂の伝ばについて .....	小田明	59
3端子薄膜抵抗の等価抵抗近似計算法 .....	辻一夫	71
マイクロ波におけるフェライトの特性 .....	小沢賢治	77
タール系食用色素の分析的研究(第1報) 薄層クロマトグラフィによる分析(1) .....	清水正英 佐々木夫人	81
写真現像剤の赤外線分光分析による定性及び定量分析について .....	勝田正男	91
Primitivism In <i>The Woodlanders</i> .....	松尾保男	101
<i>Four Quartets: An Interpretation</i> (2) "The Dry Salvages" and "Little Gidding" .....	田吹長彦	113

# 学校保健の一考察

寺本 匡 謨

<昭和44年8月20日受理>

## A Study of Health and Physical Education

When we consider a program of how to deal with students' health, and maintainment and promotion of it, in accordance with the School Hygiene Law, we cannot take the plunge into its improvement for various reasons. In most schools and colleges we have found the program formal and ineffective as presently conceived. Taking it as it is and considering its future and ideal planning, I am going to investigate in this essay the way to develop an ideal school hygiene program through modification of its present execution.

Masaaki Teramoto

### はじめに

私も工業高等専門学校の教官となって今年で7年になる。旧制中学校、新制高等学校、と通算すると早や30年近くになった。その間、保健主任、学生主事として、又一面保健体育の教官として色々の生徒学生と共に学び、共に遊び、又健康問題を語り合ってきた。今年も新学期が始まり、定例の身体検査が開始された。何時もながら思うことであるが、学校保健はいな、学生の健康管理はこれでいいのかと自問せざるを得ない。良心的に考え本当に恥かしい答しか出ない。形式的であり効果のない現状にはほとんどの学校が気づきながらいろいろな理由から改善を踏み出せないでいる。私は本当の姿を現状として出し、それに対し将来こうあったらと思う学校保健の実態を通してこれからの学校保健のあり方をさぐって見る。

#### (一) 学校保健の推移

大正10年学校医が中心となり、東京に帝国学校衛生会が発足し、全国大会が開催され小学校衛生の発展推進に関する論議がなされたり、研究発表会もあり盛大に行なわれた。各県からは代表の出席者を送り、大会を通じて学校衛生の向上発展には非常な力があつた。文部省を始め関係各省に政治的活動も併せ行ない、世論の関心と教育者の覚醒をうながした。この全国大会は3回まで東京で行われ第4回は大阪市に於いて第5回は京都市に於いて夫々開催された。昭和2年4月26日第6回全国連合学校衛生総会を福岡県主催の下に開催し、全国各県より多数の会員参加の上盛大なる行事を

行なつた。また文部省主催の学校衛生講習を4月27日より5月4日までの8日間九大にて行なつた。その後毎年盛大に行なわれていたが支那事変が勃発し、続いて世界第二次大戦となり、世はすべて戦争態勢に移行し、学校衛生も殆んど中断休止の状態となつた。戦後東京において財団法人日本学校衛生会が設立され各県にその支部を置いた。従来の学校衛生団体は一応発展的に解散して、新たに民主的の団体として編成替えをすることになった。時に昭和21年10月であつた。福岡県に於いては初代会長に九州大学小児科教授の遠城寺宗徳氏を推した。その後時勢の推移に従い、民意団体を可とする意見が強くなり、昭和24年3月会則を変更し、学校衛生会と改称した。又一面昭和22年3月法律25号により教育基本法が公布され、学校教育法もまた同時に公布せられ、いわゆる新教育が実施せられるに至り、健康は名実共に教育の基盤であるばかりでなく目的でもある様になり、健康の問題が教育の中心問題となり、従来の学校衛生時代より学校保健時代に移行した。昭和26年10月戦後第一回の全国学校保健大会を九大講堂に於いて福岡県主催の下に開催し全国各地より多数の参加者を得て盛大に行つた。日本学校保健会も国際学校保健学会に入会し、代表数名をイタリアのローマに於ける同学会に出席参加させるに至つた。国内に於いて、昭和33年4月学校保健法の公布に至つた。

◎学校保健法の公布学校保健法をここに公布する。昭和33年4月10日法律第58号として、戦後の学校保健法が明確に法律として公布され施行せられた。

第一章総則（第1条—第3条）第二章健康診断及び健

本校44年度健康診断結果（計測区別受検者数，身長）

男							女						
年令	15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上	年令	15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上
140							140						
1							1						
2							2						
3							3						
4							4						
5							5						
6							6						
7							7	1					
8							8	1			1		
9							9						
150							150						
1	1						1						
2							2						
3	2						3	3			1		
4	2	1					4		1			1	
5	1				2		5						
6		1		1			6						
7	3	1	1	1	2	1	7		1				
8	6	3	2	1	1	1	8				1		
9	7	5	3	2	1	1	9						
160	4	3	1	1	2	2	160	1					
1	5	4	5	2	1		1	1	1		1		
2	5	4	3	4	4	1	2		1				
3	9	8	6	3	4		3						
4	8	11	10	7	5	1	4						
5	15	11	5	7	9	2	5						
6	10	8	7	3	7	1	6					1	
7	9	12	8	11	3	2	7						
8	12	11	6	10	9	2	8						
9	12	8	10	9	14	2	9						
170	8	15	8	8	5	2	170						
1	7	6	11	8	8	1	1						
2	2	7	4	3	6	3	2						
3	3	5	6	5	3	1	3						
4	2	8	5	4	4		4						
5	2	5	3	4	1		5						
6	2	5	2	4	2		6						
7	2	1	5		2		7						
8		1	1		2		8						
9					1		9						
180			1	2			180						
1	1		1	1	1		1						
2						1	2						
3		1					3						
4							4						
5							5						
6		1					6						
7							7						
8							8						
9							9						
合計	140	146	114	101	99	24	合計	7	4		4	2	
算術平均	166.0	168.1	168.7	168.7	167.4	167.4	算術平均	154.0	159.0		155.5	160.5	

康相談（第4条—第11条）第三章伝染病の予防（第12条—第14条）第四章学校保健技師並びに学校医，学校歯科医及び学校薬剤師（第15条—第16条）第五章地方公共団体の援助及び国の補助（第17条—第18条）第六

章雑則（第19条—第21条）以上の各章からなりたっているが，その目的の中に「保健管理に関し必要な事項を定め……中略……健康の保持増進をはかりもって学校教育の円滑な実施とその成果の確保に資する」とあ

本校44年度健康診断結果 (計測区分別受検者数, 体重)

男							女						
年令	15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上	年令	15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上
30							30						
1							1						
2							2						
3							3						
4							4						
5							5						
6	1						6						
7							7						
8	1						8						
9							9						
40	1						40						
1	1						1						
2	1	1					2						
3	3	1					3	1					
4	5	1			1		4	1					
5	7			2			5						
6	2	2	1	1			6		1				
7	5	3	1		1		7						
8	11	5	1	2		1	8	1					
9	7	8	4				9	1					
50	6	6	2	3	2	1	50	1			2		
1	6	8	3	5	2	2	1	1			1	1	
2	13	4	4	5	5	1	2						
3	10	8	4	5	5	1	3						
4	6	11	11	5	2		4		1				
5	11	6	14	5	3	2	5		1				
6	7	5	5	6	6		6	1	1		1		
7	11	4	7	5	5		7						
8	3	8	6	4	9	3	8					1	
9	6	13	6	9	10		9						
60	3	10	10	8	9	2	60						
1	4	8	6	5	3	2	1						
2	1	3	4	3	10		2						
3		3	7	6	5	1	3						
4	3	10	3	3	6	2	4						
5	1	9	4	5	4	1	5						
6	2	2	3	4	1		6						
7		2	2	3	2	1	7						
8		1	2	2	3	1	8						
9		2	1	2	1		9						
70	1	1		1	1	1	70						
1		1	1	1		1	1						
2							2						
3					1		3						
4			1				4						
5							5						
6					1		6						
7	1						7						
8							8						
9							9						
80			1				80						
1							1						
2				1			2						
3						1	3						
4					1		4						
合計	140	146	114	101	99	24	合計	7	4		4	2	
算術平均	53.1	57.3	58.6	59.1	60.1	60.7	算術平均	49.2	53.2		52.2	55.0	

本校44年度健康診断結果（計測区分別受検者数，胸囲）

男							女						
年 令	15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上	年 令	15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上
70	1						70						
1							1						
2	1						2						
3							3						
4	1						4						
5	1						5	1					
6	7	1		1			6						
7	7	3	1	1			7	1					
8	6	3		1			8						
9	7	5	1		2		9	1					
80	7	8	6	3	1	1	80	1	1				
1	15	14	6	7	4		1						
2	5	12	8	8	4	3	2	1	2		1	1	
3	12	11	6	3	3	1	3						
4	16	10	7	8	7	2	4	1					
5	7	13	9	9	10	2	5				1		
6	15	9	13	8	8	2	6				1	1	
7	8	13	12	11	9		7	1	1				
8	7	5	15	3	10	3	8						
9	6	7	9	11	8	2	9				1		
90	1	10	5	3	9	4	90						
1	6	6	3	9	7	2	1						
2		5	6	3	9	1	2						
3	2	4	4	4	5		3						
4		3		4	1		4						
5		2	3	1	1		5						
6	2	1			1	1	6						
7				1			7						
8		1					8						
9							9						
100							100						
1							1						
2							2						
3							3						
4							4						
5							5						
6							6						
7							7						
8							8						
9							9						
合 計	140	146	114	101	99	24	合 計	7	4		4	2	
算術平均	83.8	85.8	86.8	86.9	87.0	87.6	算術平均	81.0	83.5		86.0	84.5	

る。私が教育の場に於いて必要なものは、保持増進と保健管理の両面でこれを如何に両立させその成果を挙げるかである。学校保健法施行令，施行規則等に基づき今日までやって来たが，どうもいまの学校に於ける健康診断の在り方では学生の健康管理について成果があらぬようである。

## (二) 学校保健の現状

本年何月かの朝日新聞の記事の中に学校医をたずねたとき次のような話を聞いた。200人以上の生徒が並んで健康診断を受けていた。生徒の胸に当てられた聴診器をたどっていくと耳にあてがうはずのものが校医

の首にかかっていた，びっくりした生徒が「先生聴診器が」まさかと思うだろうが，この話はいまの学校保健の姿を象徴的に語っている。校医1人に生徒は数百人。「行届いた診断はまず不可能」と多くの校医は訴える。形式的であまり効果のない現状にほとんどの学校は気づきながらいろいろな理由から改善へ踏出せないでいる。学校に校医をおくこと。1年1回健康診断をすること。これらは33年にできた学校保健法にもとずいて行われている。周知のように11年前といまでは学校体育の内容も医学の進歩も格段の差がある。ということは健康診断の内容もそれに見合ってより充

本校44年度健康診断結果（計測区分別受検者数，座高）

男							女						
年 令	15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上	年 令	15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上
70							70						
1							1						
2							2						
3							3						
4							4						
5							5						
6							6						
7							7						
8							8						
9	1						9						
80	1	1					80				1		
1		1			1		1	2					
2	1	1	1		1		2	1					
3	3	2			1		3	1					
4	7	3		1	1		4	1	1				
5	5	2	3	2	2		5				1	1	
6	16	8	4	1	8		6	1					
7	11	10	3		4	1	7	1	1				
8	18	18	7	8	5	2	8						
9	16	17	12	6	9	3	9		1		1		
90	22	15	13	17	18	6	90				1	1	
1	19	31	14	20	13	2	1		1				
2	11	13	20	14	16	4	2						
3	3	16	15	11	6	2	3						
4	1	5	7	8	7	2	4						
5	3		9	6	3	1	5						
6	2	3	3	2	3	1	6						
7			3	2			7						
8				1	1		8						
9				2			9						
100							100						
1							1						
2							2						
3							3						
4							4						
5							5						
6							6						
7							7						
8							8						
9							9						
合 計	140	146	114	101	99	24	合 計	7	4		4	2	
算術平均	89.1	90.2	91.7	92.0	90.7	91.5	算術平均	83.9	85.7		86.5	88.0	

実させねばならないのに実情は校医自身でさえ恥じるほどなのだ。なぜこうなったのか。「なんといっても学校保健法が古くなっていることが最大のガン」を校医たちの意見は一致している。そこで文部省もこのような実情にやっと目をむけ、昨年12月から保健体育審議会の学校保健分科会で学校保健法改正の審議を始めた。審議会委員の一人江口篤寿博士の意見はこうだ。「聴診と打診でことたりとする健康診断では効果は上がらない。しかも予備知識もなく、流れ作業のよほど悪い病気でないと発見出来ない。だから改正法は重点的に精密検査できるシステムにしなければいけない

でしよう」。例へばトラコーマ。最近トラコーマ患者をさがすには骨が折れる。かかっても抗生物質ですぐなほる。それなのに目の検査の最重点は、トラコーマ。眼科医は乱視、遠視、近視など視力検査こそ大事なのだ、と強調する。今迄のべたのは学校保健法施行規則中第4条の健康診断中主として校医が行う身体の内面的診断であった。健康診断は今ひとつ外面的な形態の側定がある（身長、体重、胸囲、及び座高）この面は学校の教職員が測定にあっているのが現状である。教職員が測定するので人数の大小にかかわらずデータとして出るので正確に記録されている。この利用度



本校44年度健康診断結果（在学者の健康状態）

調査項目	性別 年令	男							女						
		15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上	計	15歳	16歳	17歳	18歳	19歳	20歳以上	計
1 在学者総数 (外国人・通信教育の者は除く)		140	146	114	101	99	24	624	7	4	0	4	2		17
2 結核検査	受検者数 (免除者も含む)	140	146	112	100	99	24	621	7	4	0	4	2		17
	結核被患者数 (A <sub>1</sub> A <sub>2</sub> B <sub>1</sub> B <sub>2</sub> C <sub>1</sub> C <sub>2</sub> の者)														
	定期結核健康診断以外の検査 で判明した結核被患者数(A <sub>1</sub> A <sub>2</sub> B <sub>1</sub> B <sub>2</sub> C <sub>1</sub> C <sub>2</sub> の者と休養者も含む)														
3 ツ反 応検査	受検者数(a+b+c+d) (既陽性の免除者も含む)	139	143	113	100	99	24	618	7	4	0	4	2		17
	陽性	124	136	108	98	98	24	588	7	4		4	2		17
	陽転した者(b)		6	4	2			12							
	疑陽性の者(c)	6		1		1		8							
	陰性の者(d)	9	1					10							
4 寄生 虫卵検査	受検者数	118	12	1	1			132	7	1					8
	回虫卵保有者	1						1							
	十二指腸虫卵保有者	1						1							
	蟯虫卵保有者														
	その他の虫卵保有者														

は非常に有効にされ各年代の比較、成長の度合、栄養の偏重等それぞれの立場で研究されている。我が国に於ける学校の保健の現状は前述の通り本当にこれでいいのかと心淋しく思うが欧米に於いては一体どんなであろうか。遠城寺宗徳先生の「欧米の学校保健の現況」の講演では、次のように述べられている。学校保健については表立った視察は出来なかったが、いろいろの機会に採ってみた。ワシントン市の小学校では身体検査はない、学校医もいない、入学の時学校から家庭医を紹介される。その先生の所に行って健康診断を受け健康指導をしてもらい、病気になるとそこにかかる。子供の健康の指導、管理は学校がやるのではなく、家庭自らが守るもので、健康はあたえられるものではなく、自分で握るものであるという私の多年の主張がここで実施された。我が国に於ける今の学校保健の形態は、やがて文化が進んで来るとワシントンの学校のように、家庭それぞれで医者にかかる形態になるのではなからうか。現在その形態を迎りつつある。トラホームにかかれば眼を洗ってやる、集団駆虫をやるというようなことをして来たがこれはやむをえざる過渡期の過程であって、家庭で医者にかかってなおして貰うという進み方を子供に植えつけることが出来ると思っていたが、アメリカではこの状態がすでに実施さ

れているのである。世界健康教育連盟総会が開かれて、我が国から京都大学の川端教授が行かれた。私はアメリカのケルンで詳しく聞いたのであるが、問題となったことは、学校教育をどうするかということであった。学校が別荘を持つということで林間学校とかランドハイムを持って健康の促進に資することである。それから学校庭園であるが私は数年来運動場を持った学校はあるが憩いの場所を持った学校はないといっていたが、外国では実現されて樹木を植え、芝生を作り、庭園に花を植えて楽しむ学校庭園があって、そこで休憩しているのである。スポーツに於いても平衡の訓練が行われている。医学の進歩は死亡率が非常に低くなって、極端に逆説的というならば、将来死ぬのは自動車に引かれて死ぬくらいのものになると思う。それで体育も欧米では平衡訓練が行われている。つり合をとっていくというところに重点をおいている。感の強い子を作ることをやっている。たとえば棒の上を歩かせたり、玉のりをさせて落ちないようにさせるなどつり合をとっていくことに重点をおいている。いわゆる生きる感をよくする。感のよい子。運動神経の発達した子にみんなをすることにスポーツを用いている。私が痛切に感じたことは現在においても医学の新しい方向はつり合の医学、平衡の医学、つり合いのとれるよう

なしくみに身体をもっていく、つり合のとれるようにするにはどうすればよいか、寒ければぐじゃぐじゃになるのではなく適切に寒さにたいして反応する、刺戟に対して反応のぐあいをつり合よくするという研究が最も大きな問題である。私は平衡医学、つり合いの医学といているが、学童の訓練もつりあい「すべり落ちないように」一竿の丸木橋を通らなければならない時訓練したものは落ちないが、訓練のない者は感の悪いもの、要領の悪いものは落ちて死ぬ。死なないように訓練をする。学校における健康促進ということは積極的に鍛えるという訓練がテーマであって、治療の医学から予防の医学、積極的な健康増進の積極策の方向に行っている。学校保健の世界的趨勢だと考えてよい。健康とは何か、寒いとすぐにへたばるのではなく、適当に水鼻が出る、咳をするのが健康で又個人差がある。健康児と虚弱児との間は絶対に分け方はない。正しい健康に対する知識をもたせ、それに対する生活の態度を植えつけるにはどうしたらよいか、そういうようにした場合の評価はどうするかである。一日における生理的動揺と学業は新陳代謝などを医学的に調べ、心理的、精神医学的には朝昼晩の計算能力の差を調べ、一日における生理的動揺を考え、学科の組立、時間割の編成をどういうふうにすれば健康上よいかを研究する。栄養などは充分とっている。食の指導は最も原始的なもので、健康指導上の食の指導なんかやらなくてもよいように早くならなければならない。学校給食なんかやらなくてもよいというのが私の持論だが、あちらもそうであった。学校給食はアメリカから来たというが、アメリカではやっていない。セルフサービスのレストランがある。三十五セント切符(回数券)を買って食べる。食べたくない人は家から持って来る。日本のように机でみんなが牛乳やパンを食べる給食はやっていない。これは所変れば品変るで現在の日本の経済状態その他では致し方はないが、やはり向う所の理想はあれではないのである。今の日本は仕方がないが、しかし本当はそれではいけない。先進国欧米ではその本場のところが現在行なわれているので、それに向って前進しなければならないと思う。要するにその大綱としては学校保健における一家庭でもそうであるが、健康というものは守ってやるのではなく、親や教師が丈夫にしてやるのではなく、自らが握るものであるという生活態度を一生涯持ち続けられるように子供に植えつけるのではないかと思うのである。

### (三) 学校保健の考え方と前進した方法

学校保健と言うことでなく、根本はやはり個人の健康はその人自身で管理し色々なことを身につけると同時にそれを処置する習慣を養い、それを実行するように

学校では教師が家庭では父母が教育しなければならない。それを基本として学校では法令に基づき有効にしての確な方法で健康診断を行うことが大事ではなからうか。実際今それを行っている例を二、三、挙げて見よう。長崎県諫早市の一部の医師達が動きだした。諫早方式として九州の学校保健関係者に知られる校医団システムは42年4月の定期健康診断からスタートした。まだ諫早中、西諫早中、諫早商高それに長崎県日大高と4つの中高校で実験的に行われているに過ぎないが、検診内容はガラリと変った。一人の校医が数日かけて生徒数百人の診察をするのがほとんどの学校でやっている方法だ。これに対し諫早方式では19人の医師が集団で診察に当る。内科7人外科4人婦人科3人皮膚科2人眼科、レントゲン、耳鼻科、各1人。まづ内科医が一般的な診察をしてフルイにかける。その結果、どこかに欠かんがあると「君は整形外科」「君は皮膚科」と指示し、待機している各専門医に精密検査をしてもらう。さらに婦人科、眼科、耳鼻科、は前もって詳しいアンケートを取り、自覚症状のある生徒をたねんに見るのだ。この方法だと内科医とアンケートの2つで目なり耳鼻科の欠かんが発見出来る。「校医団検診のいい点は各科の医師が専門的に見てくれるので治療や指導が的確になり、集団なので短時間ですむようになったこと」中でも婦人科医が加わったことは女生徒職員両親に大変喜ばれている。生理問題が主だが、意外に異常生理を訴える生徒が多く、そのような生徒には個人指導するし、他の生徒にも生理一般について教えている。もちろん婦人科含めた集団校医制度は九州で初めての試みである。この方法が学校にとってもプラスで一歩前進なら医師側にも多くの利点が生れた。「校医一人でやると時間がかかり本業の犠牲も大きかったが、集団だと短時間なので気軽に参加出来る。また判断に困った時、みんなの意見を聞いて正しい結論が出せる」と校医の話である。本当に結構な両得の方法であるが、このように校医団が各地で集団を作ってもらえるが心配だ。各地にそれぞれ医師会があって、その意見がまちまちであるのが現状ではなからうか。学校では校医一人が発令されているのが普通である。集団になった場合は、他の医師は協力という形になり無報酬になる。それでは協力医に対して気の毒である。正しい学生の健康管理がねらいで、実績をあげ効果があることは間違いないのであるから国、県、市、は考慮すべきではなからうか。集団校医という言葉の内容のある本格的なものにして九州に広めた、学校は福岡市警固小学校だろう。始めたのが昭和26年。歴史といい、実績といい文字通り全国にほこれる内容を持っている。校医、養護教諭、父母、生徒代

表の4者が集って学校保健を話し合うのだが、保健委員会を定期的に開いて色々の事を討議する決定した事項を実行し又話し合いの内容を各家庭に配布する。きめこまかい保健活動を4者が協力し合って進めている。このように学校あげて協力態勢がととのうまでには、長いつみかさねが必要だった。警固小学校の集団校医制といっても諫早方式とは質的に全く違っている。校医団はスタートの時から6人制で専門はともに内科、ユニークな方法というのは6人がそれぞれ1学年づつ受持って専従の「学年医」になるのだ。例えば1年生の担当になって翌年生徒が進級すると、校医もそのまま持上がる。この調子で6年まで1貫して生徒についてまわる。6年間受持って卒業するとまた1年の担当。「1人が6年間責任を持って診察するから、行届いた生徒の健康管理が出来る」と校医団の1人三宅重徳さんはいう。学校保健法の古くささ、各校の健康診断がいかにか形式的なものであるかは、警固小の例を具体的にみるときより一層はっきりしてくる。警固小には診察票が3つある。定期的健康診断を記入した健康票と、結核票、心電図をもとにした循環器票。「より多くより精密に」生徒の診察をするのが校医団のモットーだ。ツベルクリン反応も他校は年1回なのに、ここでは新入生が3回(4ヶ月おき)2年以上は2回(半年に1回)もやる。そして新入生在校生全部の心電図をとる。こうして多角的に診察して心臓病などがみつかると家庭に連絡し、親、生徒、校医、も付添って九大で精密検査をする。さらに診断票は各々の受持ちにも知らされるので、先生と生徒の心の通い合いも密接になる。一方最近の健康診断は電子計算機による方法が実行にうつされている。その例として学校ではないが、富士通の職場で行われる年2回の定期健康診断を電子計算機による予診を取入れて能率化する方法をとっている。これは職員にあらかじめ調査表をくばり、自覚症状があれば、該当する欄に丸印をつけてもらい、検診当日、キーパンチャーがこの調査表に記入された内容を電子計算機に入れると計算機はその内容に応じて、どの科で診察を受けるべきかという指示をタイプで打出す仕組みである。これによって、受診者全員を機械的に診察するのではなく、問題のありそうな人をしぼって重点的に診断出来るので、能率がよく、病気の発見も容易になるなどの効果のあるという。調査表には自覚症状として「めまい」「耳なり」「他人より早く息切れする」「はきけ」など34項目があり、それぞれ「いつも」「時々」「現在」の3つの欄がある。この自覚症状の組合せによってFACOM32SIO電子計算機は「アナタハ、シンゾウ、ケッカソヲオモニモチモラッタクダサイ」とか「カラダゼンタイニ

チュウイシテモラッタクダサイ」など7項目のどれかが、またはとくに診察を受ける心配はないという指示を打出すようになっている。この指示に従って、眼科なら眼科の診察を受ける。また必要な指示があればレントゲン撮影だけで済ませるわけだ。要するに学校でも職場でも、受診人数の多い所で1人の医師が診察して、何か病気をしなかつたかとか、ぐあいのわるいところはないかなど聞いてみたところで、病気の発見にはほとんど役立たない。電子計算機を活用してふるいわけをし、浮いた時間でいねいに診察する方が医師も、診察を受ける人にもいいはずだ。

#### (四) 学校保健はどうあるべきか。

ほとんどの人はいまの健康診断のあり方に疑問を持っている。校医の1人に生徒は数百人、こんな状態では実のある診断は出来ない。といって医師をせめるだけでは問題の本質がぼかされる。第一1分前後の診断ではどうしても形式的なものになってしまう。だから今の校医制そのものを改善しない限り問題は解決しない。働きざかりの若い人が校医になったとする。初めは一生懸命やったとしてもそのうち無力感におそわれ、結局、簡単な診断でおちゃをにごしてしまうことになる。法的にも学校保健法は集団予防にねらいをおいて個人対策はほったらかしにしている。だから改正するとしたら個人対策を折こんだものにした。いまのようなずさんな健康診断が永く続いていると云うことは、一次的には学校保健法が古くさったことになるが、学校や両親が保健にあまり関心がないことも大きな原因になっている。学校や親が学習面にばかり熱中しているので保健教育の立入るすきがないのが現状のようだ。この風潮は社会一般にもあって教育ママがそれをさらにあほっている。栄養ある食物をあたえればよいという考えであるが逆にいえば外気に抵抗力のない子をみんなで一生懸命大量生産しているようなものだ。それではどうすればよいか、私は警固小方式を採用したらいいと思うのだが、実際問題として無理だとすればかけもちでなくて、3人の専従医を置くことだ。そうすれば相当改善されよう。それには国、各自治体ももっと学校保健に理解をもち、予算的な裏付けもちゃんとやらねばだめだ。専従制にすれば前進には違いないが、それでも欠点はある。1人や2人だと創意工夫して積極的にやる事がむづかしくなるのではないか。マンネリ化の恐れがある。そうするとやはり校医集団システムがいいようになる。さらに出来れば一学年一校医制にしたらい。この方式だと継続性のある健康管理ができる。しかし、それを全部の学校に適用するのは不可能である。福岡市のように医者が多いところなら別だが、小さい町や農漁村あたりにな

ると第一医師がそんなにいない。集団でやると時間的にもロスが少なくすむし、各医師にも研究心が出て来て意欲的になりはしないか。要するに色々考えて見ても現状のままの学校保健では生徒たちに気の毒である。早く内容ある学校保健にすべきではなからうか。

## おわりに

学校保健と云っても範囲はなかなか広いものだ最初考えたのは毎年休学する学生が出る。又長期欠席の学生がいる。その原因を探ってみると何故早く本人か、親か、学校医が発見出来なかったかをなげく。そ

こで毎年行われる健康診断広く言えば学校保健のあり方を考えた。所が私の研究不足といろいろの人の意見を聞くのに余裕がなかったことを残念に思う。それと今一つは大学でもない高等学校でもない学制の特殊な高等専門学校（学校保健法では高等学校と大学では一部異なる点がある）の保健はどうあるべきかを今一步進んで研究しなければならなかったがこの問題は次期に是非完成したい。

## 引用参考文献

1. 保健会報
2. 朝日新聞

# 線型ノルム空間に於ける原点と 超平面の距離公式の一つの証明

井 上 盟 朗

<昭和44年9月29日受理>

## Another Proof of the Formula of the Distance Between the Origin and the Hyperplane in the Normed Linear Space

The formula of the title is proved in reference (1), but we can prove it also by the direct division of the space into the hyperplanes.

We show this proof as compared with the former in this paper.

Meiro Inoue

表題の公式は、文献(1) p.100 で証明が与えられているが、筆者は空間の超平面への直和分割による別証明に気附いたので、文献(1)の証明と併せて述べておく。

いま

$R$  : 線形ノルム空間

$f$  :  $R$  上の複素数値をとる恒等的に0でない有界線形汎関数

$x$  : 0でない $R$ の要素

$M_f = \{x; f(x) = 1\}$

と表わす。

また、

$$\|f\| = \sup_{x \in R} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

超平面  $M_f$  と  $R$  の原点との距離を

$$d = \inf_{x \in M_f} \|x\|$$

と定義すると、 $d$  は次の公式で与えられる。

$$d = \frac{1}{\|f\|}$$

### I 文献(1)の証明

第一段  $d \geq \frac{1}{\|f\|}$  なることの証明

$d$  と  $\|f\|$  の定義から、

すべての  $x \in M_f$  ( $x \neq 0$ ) に対して、

$$\|f\| \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \geq \frac{1}{d}$$

第二段  $d \leq \frac{1}{\|f\|}$  なることの証明

$\|f\|$  の定義から、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、

$$\|f\| - \varepsilon < \frac{|f(y)|}{\|y\|}$$

を満足する  $y \in R$  がある。

この  $y$  に対して、

$$x = \frac{y}{f(y)} \dots \dots \dots (1)$$

とおくと、

$$f(x) = 1$$

つまり

$$x \in M_f$$

次に、(1) から

$$\frac{1}{\|x\|} = \frac{|f(y)|}{\|y\|}$$

ゆえに

$$\|f\| - \varepsilon < \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{1}{d}$$

となるから、

$$\|f\| \leq \frac{1}{d}$$

従って,

$$d \leq \frac{1}{\|f\|}$$

以上から,  $d = \frac{1}{\|f\|}$  が証明された.

## II 空間の超平面への直和分割による証明

$$M_f^{(\alpha)} = \{x; f(x) = \alpha\} \dots\dots\dots (2)$$

で超平面を表わすと,

$$f(x) = 1 \iff f(\alpha x) = \alpha$$

であるから,

$$M_f^{(\alpha)} = \{\alpha x; f(x) = 1\} \dots\dots\dots (3)$$

又(2)から,  $\alpha \neq \beta$  ならば  $M_f^{(\alpha)} \cap M_f^{(\beta)} = \phi$

従って

$$R = \sum_{\alpha} M_f^{(\alpha)} \quad (\text{直和分割})$$

従って,

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{x \in R} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\alpha} \cdot \sup_{x' \in M_f^{(\alpha)}} \frac{|f(x')|}{\|x'\|} \end{aligned}$$

いま,  $M_f$  の要素  $x$  に  $M_f^{(\alpha)}$  の要素  $x' = \alpha x$  ( $\alpha \neq 0$ ) を対応させると, (3) から対応は |対| になり

$$\frac{|f(x')|}{\|x'\|} = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (\alpha \text{ にかゝりなく})$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{x \in M_f} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \in M_f} \frac{1}{\|x\|} \\ &= \frac{1}{d} \end{aligned}$$

すなわち,

$$d = \frac{1}{\|f\|} \text{ が証明された.}$$

## 参 考 文 献

- (1) コロモゴロフ・フォーミン: 函数解析の基礎 (岩波書店)
- (2) カントロヴィッチ: ノルム空間の函数解析 (東京図書)

# 再帰理論の機械故障問題への一応用

井 上 盟 朗

<昭和44年 9月29日受理>

## One Application of Recurrence Theory for the Problem of a Machine Trouble

Let us consider a case; whichever part of a machine is functionally disordered, the machine also does not work well, but as long as we repeatedly put a complete part in place of a bad one, we can keep it working for ever.

In this paper, under the assumption that a part trouble is independent of each other, we have made by Feller's Recurrence Theory an analysis of the stochastic behavior of the occurrence of a machine trouble.

Meiro Inoue

### § 1 前がき及び準備

いま電子計算機や、幾つかの環からなる鎖や、バルブが直列に取付けられている流管を例にとると、それ等は一つでも、パッケージや環がこわれたり、バルブが開放機能を失って閉ちて了ったりしたら、作動が止り、切れ又は流体の流れが止つて了う。

このように、ある機械があつて、部品のうちどれか一つでも機能を失ったら機械も故障を起す所謂直列型の故障の場合を考える。

故障部品はその都度新品と取替えてゆく、つまり個別事後取替方式をとるとする。

このとき機械の故障生起の確率論的構造は、一般に複雑だが、本論では、それに迫る一つの方法として、各部品の故障の間に独立性を仮定し、Fellerの再帰理論によって解析を行った。

次に、本論で必要となる Feller からの用語と結果を準備として述べておく。

#### (1.1) 再 帰 事 象

事象  $\varepsilon$  があつて、 $\varepsilon$  が生起したらその度毎にそれ以後の試行は、過去の試行とは独立に、しかも初めと同じ確率法則に従つて新たに繰返される時、 $\varepsilon$  を再帰事象と云う。(Feller [1], p. 282)

#### (1.2) persistent な再帰事象

再帰事象  $\varepsilon$  があつて、 $f_n$  で  $\varepsilon$  が  $n$  回目の試行で初めて起る確率を表わして、

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$$

が成立つとき、 $\varepsilon$  を persistent な再帰事象と云う。これは、 $\varepsilon$  が必ず生起することを意味している。

従つて (1.1) と併せると、 $\varepsilon$  が無限回生起し続けることを含む。(Feller [1], p. 283)

#### (1.3) non-periodic な再帰事象

整数  $\lambda > 1$  があつて、再帰事象  $\varepsilon$  が  $\lambda$  回目、 $2\lambda$  回目、 $3\lambda$  回目、……の試行でしか生起しないとき、 $\varepsilon$  を periodic と云い、そうでないとき、 $\varepsilon$  を non-periodic と云う。(Feller [1], p. 284)

#### (1.4) 平均再帰時間

persistent な再帰事象  $\varepsilon$  に対して、 $f_n$  で  $\varepsilon$  が  $n$  回目の試行で初めて起る確率を表すとき、確率分布  $\{f_n\}$  の平均値、つまり  $T = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n$  を  $\varepsilon$  の平均再帰時間と云う。

#### (1.5) ergodic な再帰事象

persistent で non-periodic な、平均再帰時間が有限な再帰事象を、ergodic な再帰事象と云う。

(Feller [1], p. 353)

次に再帰事象  $\varepsilon$  について、

$$f_n = P_r \{ \varepsilon \text{ が第 } n \text{ 期間で初めて起る} \}$$

$$u_n = P_r \{ \varepsilon \text{ が第 } n \text{ 期間で起る} \}$$

$$N_n = n \text{ 回目の試行迄の } \varepsilon \text{ の生起回数}$$

$$T = \varepsilon \text{ の平均再帰時間}$$

$$\sigma^2 = \varepsilon \text{ の再帰時間の分散}$$

と表わすと、次のことが知られている。

(1.6)  $\varepsilon$  が persistent なるための条件は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$$

が成立つことである。(Feller [1], p.285)

(1.7)  $\varepsilon$  が non-periodic で persistent ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/T$$

が成立つ。(Feller [1], p.286)

(1.8)  $\{f_n\}$  と  $\{u_n\}$  の間は次の漸化式で結ばれている。

$$u_0 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} f_1 + u_{n-2} f_2 + \dots + u_1 f_{n-1} + f_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(Feller [1], p.285)

(1.9)  $\varepsilon$  が ergodic で,  $\sigma < +\infty$  ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(N_n) = 1/T$$

が成立つ。(Feller [1], p.298)

又この論文で, 必要上新しく, 次の3つの用語を設けることにする。

(1.10) 事象の定義確率変数列

事象  $E$  に対して, 確率変数列  $\{X_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を

$$X_n = \begin{cases} 1 & (E \text{ が } n \text{ 回目の試行で生じたとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

のように定めるとき, これを事象  $E$  の定義確率変数列と云うことにする。

(1.11) 独立再帰事象系

再帰事象  $\varepsilon^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) の定義確率変数列を  $\{X_n^{(i)}\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) で表わす。任意の  $n$  に対して  $\{X_n^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) が独立であるとき,  $\{\varepsilon^{(i)}\}$  は独立再帰事象系と云うことにする。

(1.12) 再帰事象の和

事象  $\varepsilon$  と再帰事象系  $\{\varepsilon^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) があって, 何回目の試行に於いても,  $\{\varepsilon^{(i)}\}$  のうち少くとも一つが生起すれば  $\varepsilon$  も生起するとき,  $\varepsilon$  を再帰事象  $\{\varepsilon^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) の和と云うことにする。たゞし再帰事象の和は一般に再帰事象にはならない。

## §2 問題の定式化

いま有限の寿命を持った部品からなる機械  $[M]$  を考える。いま部品が一つでも機能を失ったら,  $[M]$  も故障を起し, 機能を失った部品は同種の新品と取替えられるといった具合に, 所謂個別事後取替方式をとってゆく。

いま各部品の寿命は, ある単位期間の倍数の値をとる既知の分布を持つ確率変数であり, 故障はその期間の末に起るとみなしてゆく。

そうすると, 各期間では可能な結果が部品について

は“取替”又は“非取替”:  $[M]$  については“故障”又は“非故障”の二つであるような試行が続けられてゆく。

いま各部品の故障が独立な場合を考えると, 次々に部品を取替えてゆくことは再帰事象として取扱える。

もし一つの部品が丁度第  $n$  期間迄使える確率を  $f_n^*$  とすれば,  $\{f_n^*\}$  は再帰時間の分布となる。

寿命が有限のときは,  $\sum f_n^* = 1$  となり, 再帰事象は persistent で, その再帰時間の平均も分散も当然有限である。

又この事象は non-periodic で, 寿命はどんな時期にでも尽きることがあると仮定する。

約言すると, この再帰事象は ergodic と云える。

いま,  $m$  個の部品  $[P^{(i)}]$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) の取替えをそれぞれ  $\varepsilon^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) で, 又機械  $[M]$  の故障を  $\varepsilon$  で表わすと, 以上のことは次のような仮定の形にまとめられる。

仮定

(A-1)

$\{\varepsilon^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) は再帰事象で, その再帰時間は有限でそれ迄のあらゆる正の整数値をとる確率変数で, その分布は既知である。

(A-2)

$\{\varepsilon^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) は ergodic な再帰事象である。

(A-3)

$\{\varepsilon^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) は独立再帰事象系である。

(A-4)

$\varepsilon$  は再帰事象系  $\{\varepsilon^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) の和である。

本論文では, これ等の仮定の下に, §3で  $\varepsilon$  の行動を示す主なものとして, 次のものを求めて, 生産管理の諸問題の基礎とし, §4では簡単な模型に基いてその応用例を示しておいた。

(1°)  $f_n = P_r \{ \varepsilon \text{ が第 } n \text{ 期間で初めて起る} \}$

(2°)  $r_n = P_r \{ \varepsilon \text{ が第 } n \text{ 期間迄起らぬ} \}$

(3°)  $u_n = P_r \{ \varepsilon \text{ が第 } n \text{ 期間で起る} \}$

(4°)  $E(N_n) =$  第  $n$  期間迄の  $\varepsilon$  の期待生起回数

長期間の問題として,

(5°)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

(6°)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(N_n)$

この時, 解析に当っては, 一般に  $\varepsilon$  に再帰性が無い

ため、(1°)～(6°)を通して仮定(A-3)で問題を分解し個々の $\varepsilon^{(i)}$ の問題に帰着せしめる過程をとり、そこで再帰理論を適用し、最終的には部品の寿命分布から求まることを示した。

具体的に、その主な点を述べると、

(1)

$\{f_n\}$ と $\{u_n\}$ を結ぶ漸化式(1.8)が適用出来ぬため、この二つを別々に導いた。

(2)

(5°), (6°)では、一端これらを再帰事象 $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots, \varepsilon^{(m)}$ やこれ等を組合せてつくられる再帰事象の対応する量に分解しておき、そこで既知の結果(1.7), (1.9)を適用して結果を導いた。

猶こゝで本論の中軸をなしている仮定(A-3)の妥当性について考察してみると、まえがきに述べた電子計算機や環の例ではこの仮定は成立しているし、又流管の場合にも、一つのパルプが壊れても他のパルプに過大な負荷がかゝらぬという条件があれば成立とみてよい。

併し一般には、各部品間には複雑な交互作用がある。それなのに、それ等の故障間に独立性を仮定したのは単純すぎると思ふやうが、因子間の独立性や入力間の独立性を仮定してたてた実験計画や待ち合せ行列等の模型が各種の問題でかなりよく現象を写している結果からみて、本論も第一近似の役目を果たすと思う。

## §3 結果

### 3.1

本節では $\varepsilon$ が第 $n$ 期間で初めて起る確率及び $\varepsilon$ が第 $n$ 期間迄に起らぬ確率をそれぞれ $f_n, r_n$ で表わしこれ等を導く。

一般には $\varepsilon$ は再帰性を持たぬから、2回目の生起からは $f_n, r_n$ は意味を失うが、次に挙げる2つの場合にはそれぞれ意味を持つ。

(i) どれか1個の部品の故障で機械全体を取替へねばならぬときは、その取替自身が再帰事象として繰返され、 $\{f_n\}$ はその再帰時間の分布になる。

(ii) 機械の無償修理期間や信頼性が問題になるときは $r_n$ が、又金属の疲労のように1回でその物全体が使用不能等の重大な結果になるときは $f_n$ が問題になる。

ここで新たに、

$$f_n^{(i)} = P_r \{ \varepsilon^{(i)} \text{ が第 } n \text{ 期間に初めて起る} \}$$

$$r_n^{(i)} = P_r \{ \varepsilon^{(i)} \text{ が第 } n \text{ 期間迄に起らぬ} \}$$

と表わすと、

$$r_n^{(i)} = 1 - P_r \{ \varepsilon^{(i)} \text{ が第 } n \text{ 期間迄に起る} \}$$

従って、

$$(3.1.1) \quad r_n^{(i)} = 1 - \sum_{k=1}^n f_k^{(i)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^{(i)}$$

仮定(A-3), (A-4)から

$$(3.1.2) \quad r_n = \prod_{i=1}^m r_n^{(i)}$$

(3.1.1), (3.1.2)から次の公式が得られる。

公式(3.1)

$$r_n = \prod_{i=1}^m \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^{(i)} \right\}$$

又

$$f_n = \sum_{k=n}^{\infty} f_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$$

だから、(3.1.1)を代入すると、

$$f_n = r_{n-1} - r_n$$

上式に公式(3.1)を代入すると、直に次の公式が得られる。

公式(3.2)

$$f_n = \prod_{i=1}^m \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} f_k^{(i)} \right\} - \prod_{i=1}^m \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^{(i)} \right\}$$

### 3.2

機械の故障即ち $\varepsilon$ が第 $n$ 期間で生起する確率を( $u_n$ で表わす)求めておくことと生産管理に有用である。特にここでは再帰事象同様 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ が存在するので、長期間の予測と計画には特に好都合である。

一例を挙げると、同じ $k$ 台の機械の集団があるとす。この時、各機械の故障は独立であるとみなせる場合は、結果が“故障”か“非故障”の何れかである独立な試行が各機械毎につき $k$ 回行われると考えられる。

このとき、故障機械の台数は二項分布に従う。だから第 $n$ 期間では $k$ 台中 $j$ 台が故障中である確率は、

$${}^k C_j u_n^j (1 - u_n)^{k-j} \quad (j = 0, 1, \dots, k)$$

となり、平均故障台数は $ku_n$ 台で、長時間後 $u_n$ がほぼ一定になった時は、上の $u_n$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ でおき代えればよい。これに基づく応用例は後に§4で示す。

いま $u_n$ を求める為に、新たに

$$T^{(i)} = \varepsilon^{(i)} \text{ の平均再帰時間}$$

$$= \text{部品 } [P^{(i)}] \text{ の平均寿命}$$

$$u_n^{(i)} = P_r \{ \varepsilon^{(i)} \text{ が第 } n \text{ 期間で起る} \}$$

と表わすことにすると、仮定(A-3), (A-4)から

$$P_r \{ \varepsilon \text{ が第 } n \text{ 期間で起らぬ} \}$$

$$= \prod_{i=1}^m P_r \{ \varepsilon^{(i)} \text{ が第 } n \text{ 期間で起らぬ} \}$$

書き代えると、

$$I - u_n = \prod_{i=1}^m (I - u_n^{(i)})$$

従って

$$u_n = I - \prod_{i=1}^m (I - u_n^{(i)})$$

$n \rightarrow \infty$  として、既知の結果 (1.9) によると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = I - \prod_{i=1}^m (I - 1/T^{(i)})$$

が導かれる。以上の結果をまとめると、次のようになる。

公式 (3.3)

$$(3.2.1) \quad u_n = I - \prod_{i=1}^m (I - u_n^{(i)})$$

$$(3.2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = I - \prod_{i=1}^m (I - 1/T^{(i)})$$

ここで、 $u_n^{(i)}$  は部品  $[P^{(i)}]$  の寿命分布  $\{f_n^{(i)}\}$  から (1.8) の漸化式を用いて求めればよい。

3.3

本節では、機械管理の基礎として、

(i) 第  $n$  期間迄の、機械故障回数  $N_n$  の期待値  $E(N_n)$

(ii) その長時間平均  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(N_n)$

を求め、その応用として引つゞき次節で簡単な損失計算例を示しておいたが、(ii) は故障の生起間隔を表わす一つの尺度なので、点検周期の決定の見安になる。

先づ、一般の事象  $E^*$  について成立つ次の性質を示しておく。

$$u_n^* = Pr \{ E^* \text{ が第 } n \text{ 期間で起る} \}$$

$$N_n^* = E^* \text{ の第 } n \text{ 期間迄の生起回数}$$

とおくと、

$$(3.3.1) \quad E(N_n^*) = \sum_{s=1}^n u_s^*$$

が成立つ。

何故かという、 $E^*$  の定義確率変数を  $\{X_n^*\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) で表わすと、 $X_s^*$  は第  $s$  期間に  $E$  が起ったときに 1 を、起らなかったときに 0 をとるようにな定められているから、

$$(3.3.2) \quad N_n^* = \sum_{s=1}^n X_s^*$$

$$\text{又 } E(X_s^*) = Pr \{ X_s^* = 1 \} \times 1 + Pr \{ X_s^* = 0 \} \times 0 = u_s^*$$

つまり、

$$(3.3.3) \quad E(X_s^*) = u_s^*$$

(3.3.2), (3.3.3) から (3.3.1) の成立することが判る。

さてこれから  $E(N_n)$  を求めよう。

公式 (3.2.1) で  $n$  を  $s$  に代えて展開すると、

$$(3.3.4) \quad u_s = I - \prod_{i=1}^m (I - u_s^{(i)})$$

$$\begin{aligned} &= I - (I - \sum_{i=1}^m u_s^{(i)} + \sum_{i_1 < i_2}^* u_s^{(i_1)} u_s^{(i_2)} - \dots \\ &\dots + (-I)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}^* u_s^{(i_1)} u_s^{(i_2)} \dots u_s^{(i_k)} \dots \\ &\dots + (-I)^m u_s^{(1)} u_s^{(2)} \dots u_s^{(m)} \end{aligned}$$

ここで  $i_1, i_2, \dots, i_k$  は  $I \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$

$\leq m$  なる自然数で、 $\sum^*$  はそれ等すべての組合せからつくられる  $mC_k$  個の項の和を表わすものとする。

従って

$$\begin{aligned} u_s &= \sum_{i=1}^m u_s^{(i)} - \sum_{i_1 < i_2}^* u_s^{(i_1)} u_s^{(i_2)} + \dots \\ &\dots + (-I)^{k+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{k+1}}^* u_s^{(i_1)} u_s^{(i_2)} \dots u_s^{(i_{k+1})} + \dots \\ &\dots + (-I)^{m+1} u_s^{(1)} u_s^{(2)} \dots u_s^{(m)} \end{aligned}$$

ここで、(3.3.5) の  $s = 1, 2, \dots, n$  に対する  $n$  個の式を辺々加えて、左辺を (3.3.1) で書き代えると、次の公式が得られる。

公式 (3.4)

$$\begin{aligned} (3.3.6) \quad E(N_n) &= \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^n u_s^{(i)} - \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < i_2}^* u_s^{(i_1)} u_s^{(i_2)} \dots \\ &\dots + (-I)^k \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}^* u_s^{(i_1)} u_s^{(i_2)} \dots u_s^{(i_k)} + \dots \\ &\dots + (-I)^{m+1} \sum_{s=1}^n u_s^{(1)} u_s^{(2)} \dots u_s^{(m)} \end{aligned}$$

ここで

$N_n = E$  の第  $n$  期間迄の生起回数

$$u_s^{(i)} = Pr \{ \varepsilon^{(i)} \text{ が第 } s \text{ 期間に起る} \}$$

次に、(ii) の  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(N_n)$  を求めるが、その準備として次の性質を導いておく、

性質 (3.5)

$\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots, \varepsilon^{(k)}$  が平均再帰時間  $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(k)}$  を持つ ergodic な再帰事象で、 $\varepsilon^{(1,2,\dots,k)}$  でそれ等が同時に成立つ事象を表せば、 $\varepsilon^{(1,2,\dots,k)}$  も又 ergodic な再帰事象で、その平均再帰時間を  $T^{(1,2,\dots,k)}$  で表わせば

$$(3.3.7) \quad T^{(1,2,\dots,k)} = T^{(1)} \cdot T^{(2)} \dots T^{(k)}$$

が成立つ。何故かという、

$$u_n^{(1,2,\dots,k)} = Pr \{ \varepsilon^{(1,2,\dots,k)} \text{ が第 } n \text{ 期間で起る} \}$$

と表わすと、仮定 (A-3) から、

$$(3.3.8) \quad u_n^{(1,2,\dots,k)} = u_n^{(1)} \cdot u_n^{(2)} \dots u_n^{(k)}$$

ここで、 $n \rightarrow \infty$  として既知の結果 (1.7) によると、

$$(3.3.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{(1,2,\dots,k)} = \frac{1}{T^{(1)} T^{(2)} \dots T^{(k)}}$$

が成立つから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1,2,\dots,k)} = +\infty$$

従って、既知の結果 (1.6) から、 $\varepsilon^{(1,2,\dots,k)}$  は persistent と云える。又仮定 (A-2) から、non-periodic であることも明かである。

既知の結果 (1.7) を適用すると、

$$(3.3.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{(1,2,\dots,k)} = \frac{1}{T^{(1,2,\dots,k)}}$$

(3.3.9), (3.3.10) から (3.3.7) が導かれる。

いよいよ本節の目標 (ii) の  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(N_n)$  を導こう。

仮定 (A-3) を使って、公式 (3.4) を変形すると、

$$\begin{aligned} E(N_n) &= \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^n u_s^{(i)} - \sum_{s=1}^* \sum_{s=1}^n u_s^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1} \sum_{s=1}^* \sum_{s=1}^n u_s^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)} \\ &\dots + (-1)^{m+1} \sum_{s=1}^n u_s^{(1,2,\dots,m)} \end{aligned}$$

ここで、 $N_n^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)} = \varepsilon^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)}$  の第  $n$  期間迄の生起回数とし、(3.3.1) を使うと、

$$\begin{aligned} E(N_n) &= \sum_{i=1}^m E(N_n^{(i)}) - \sum_{s=1}^* E(N_n^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}) + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1} \sum_{s=1}^* E(N_n^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)}) + \dots \\ &\dots + (-1)^{m+1} E(N_n^{(1,2,\dots,m)}) \end{aligned}$$

性質 (3.5) と既知の結果 (1.9) と (3.3.7) から、すべての  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  について、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(N_n^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)}) &= \frac{1}{T^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)}} \\ &= \frac{1}{T^{(\varepsilon_1)} T^{(\varepsilon_2)} \dots T^{(\varepsilon_k)}} \end{aligned}$$

が成立つから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(N_n) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{T^{(i)}} - \sum_{s=1}^* \frac{1}{T^{(\varepsilon_1)} T^{(\varepsilon_2)}} + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1} \sum_{s=1}^* \frac{1}{T^{(\varepsilon_1)} T^{(\varepsilon_2)} \dots T^{(\varepsilon_k)}} \\ &\dots + (-1)^{m+1} \frac{1}{T^{(1)} T^{(2)} \dots T^{(m)}} \end{aligned}$$

ここで、(3.3.4) の展開の逆の過程を進めれば、次の公式が得られる。

公式 (3.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(N_n) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - 1/T^{(i)})$$

ここで、

$N_n^{(i)}$  =  $\varepsilon$  の第  $n$  期間迄の生起回数

$T^{(i)}$  =  $\varepsilon^{(i)}$  の平均再帰時間

である。

## §4 応用例

### 4.1 生産計画への応用

本節では、前章 3.2 の結果の応用を示す。いま、 $k$  台の機械があって、単位期間を 1 日にとり、

$t_1$  = 1 日の機械の予定動作時間

$t_0$  = 1 回の機械修理の所要時間

$a$  = 機械の単位動作時間当りの仕事量

$u_s = Pr$  {第  $s$  日目に機械が故障する}

と表わすと、第  $s$  日目には、

故障機械の期待台数は  $ku_s$  台

無故障機械の期待台数は  $k(1 - u_s)$  台

である。以下期待値で計算を進めてゆく。第  $s$  日目の仕事量を  $W_s$  とすると、

$$E(W_s) = [k(1 - u_s) a t + ku_s a (t_1 - t_0)]$$

$$(4.1.1) \quad E(W_s) = ka(t_1 - t_0 u_s)$$

充分長時間後には、一日の仕事量は (3.2.2) から、

$$(4.1.2) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} E(W_s) = ka[t_1 - t_0 \{1 - \prod_{i=1}^{\infty} (1 - 1/T^{(i)})\}]$$

初めの  $n$  日間で達成する仕事量を  $\widetilde{W}_n$  で表わすと、(4.1.1) から、

$$E(\widetilde{W}_n) = \sum_{s=1}^n E(W_s)$$

$$(4.1.3) \quad E(\widetilde{W}_n) = ka(t_1 n - t_0 \sum_{s=1}^n u_s)$$

予定の仕事量  $\widehat{W}$  が与えられているとする。その時、 $n$  日で仕上げるに要する機械の台数  $k$  は、

$$k = \frac{\widehat{W}}{a(t_1 n - t_0 \sum_{s=1}^n u_s)}$$

で見積もられる。

又機械の台数  $k$  が与えられているときの所要日数は

$$E(\widetilde{W}_n) \geq \widehat{W} \text{ ととく}$$

$$\text{つまり } t_1 n - t_0 \cdot \prod_{s=1}^n u_s \geq \frac{\widehat{W}}{ka}$$

を満足する最小の  $n$  である。

充分長時間後に、 $u_n$  がほぼ一定とみなせる期間に入ってから、(4.1.2) を使うと機械  $k$  台の  $n$  日間の仕事量  $\widetilde{W}_n$  は次のように近似できて計算が容易になる。

$$E(\widetilde{W}_n) = kan[t_1 - t_0 \{1 - \prod_{i=1}^m (1 - 1/T^{(i)})\}]$$

### 4.2 損失計算への応用

本節では、前章の 3.3 の結果を応用して簡単な模型で損失計算の例を示す。

$C$  = 1 回の機械故障による損失

$$C^{(i)} = \text{部品 } [P^{(i)}] \text{ の 1 個の取替費用} \\ (i = 1, 2, \dots, m)$$

が各回一定とみなした場合に、

$L_n =$  第  $n$  期間迄の此等の損失の累計  
を考えよう。

今迄通りに、

$N_n = \varepsilon$  の第  $n$  期間迄の生起回数

$N_n^{(i)} = \varepsilon^{(i)}$  の第  $n$  期間迄の生起回数

で表わすと、明らかに、

$$L_n = C N_n + \sum_{i=1}^m C^{(i)} N_n^{(i)}$$

となるから、次式が成立つ。

$$(4.2.1) \quad E(L_n) = C \cdot E(N_n) + \sum_{i=1}^m C^{(i)} \cdot E(N_n^{(i)})$$

ここで、右辺の第 1 項は公式 (3.4) により、第 2 項は (3.3.1) によって計算すればよい。(4.2.1) に公式 (3.6) と既知の結果 (1.9) を適用すると、

$$(4.2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(L_n) = C \cdot \prod_{i=1}^m (1 - 1/T^{(i)}) \\ + \sum_{i=1}^m C^{(i)} / T^{(i)}$$

が得られる。ここで、 $T = \varepsilon$  の平均再帰時間である。上式は長期間にわたる場合の単位期間当りの期待損失額を近似している。本例のような計算は、部品の取替方式決定に当って有用であろう。

## 文 献

- [1] Feller, W. An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1, 2-nd ed. New York, John Wiley and Sons Inc (1957)
- [2] Fluctuation theory of recurrent events. Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), 98-119
- [3] 国沢・宇田川編, オペレーションズ・リサーチ入門 (広川書店)
- [4] 塩見弘著, 信頼性工学入門 (丸善株式会社)

# 根軌跡の数値解法(其のII)

木 村 剛 三  
大 山 司 朗

<昭和44年9月29日受理>

## Numerical Solution of Root Locus (Part Two)

We report here, as the sequel to the last paper, some examples of the numerical solution of the root locus problem in various automatic control systems.

Especially in this paper, we have tried calculating the root of the system which has dead time, making the result draw the direct locus by the curve plotter, and simulating by the analogue computer the case that the real part of the root is zero.

Making of the case that the locus crosses the real axis, we think there remain some questions to study further. So we will continue to follow them.

Gozo Kimura, Shiro Oyama

### 1. ま え が き

前回に引き続き、自動制御において現われる根軌跡の問題の電子計算機による数値解法の計算例を報告する。今回は特に無駄時間を含む系について計算し、その結果をカーブプロッターで直接軌跡を画かせた他、根の実部が0になる場合についてアナログコンピューターでシュミレートした。軌跡が実軸と交わる場合については今すこし研究を要する点が残っているので次回に譲ることにする。

#### §1 計 算 法

前回に述べたところであるが、簡単に要点を記しておく。ラプラス変換された代数方程式を

$$f(s) + kg(s) = 0 \quad (1.1)$$

とする。sはラプラス変換におけるパラメーターでありkは回路におけるゲイン定数である。ここでは根が複素根である場合について考える。今

$$s = x + iy \quad (1.2)$$

とおき(1.1)に代入して整頓すれば

$$u(x, y; k) + iyv(x, y; k) = 0 \quad (1.3)$$

を得るがここでは

$$\left. \begin{aligned} u(x, y; k) &= 0 \\ v(x, y; k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

をとくことにする。

u, vをx, y, kで偏微分した式をそれぞれ $u_x, u_y, u_k, v_x, v_y, v_k$ で表わせば(1.4)より

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{dx}{dk} + u_y \frac{dy}{dk} + u_k &= 0 \\ v_x \frac{dx}{dk} + v_y \frac{dy}{dk} + v_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

を得、これより

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dk} &= -\frac{u_k v_y - v_k u_y}{u_x v_y - v_x u_y} \\ \frac{dy}{dk} &= -\frac{u_x v_k - v_x u_k}{u_x v_y - v_x u_y} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

を導き、これを $k=0$ のときの(1.1)の根を出発点として数値積分することにより必要なkの値に対する根の値を求めるのである。

#### §2 高次方程式の場合

1例として(1.1)に対する式

$$s(s+2)(s^2+2s+2) + k(s+3) = 0 \quad (2.1)$$

を考える。s = x + iyとおいて

$$\left. \begin{aligned} u(x, y; k) &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4x^3 - 12xy^2 \\ &\quad + 6(x^2 - y^2) + 4x + k(x+3) \\ v(x, y; k) &= 4(x+1)(x^2 - y^2 + 2x + 1) + k \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

を導き、これより

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 4\{x(x^2 - 3y^2) + 3(x^2 - y^2 + x) + 1\} + k \\ u_y &= -4y(3x^2 - y^2 + 6x + 3) \\ u_k &= x + 3 \\ v_x &= 4(3x^2 - y^2 + 6x + 3) \\ v_y &= -8y(x+1) \\ v_k &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

を求め、これを (1.6) に代入して  $x, y$  の  $k$  を独立変数とする連立常微分方程式とし、これを電子計算機にかけ、ルンゲ、クッタ、ギル法により数値積分した。初期値としては (2.1) で  $k=0$  とおけば

$$s = 0, -2, -1+i, -1-i$$

を得るが、ここでは  $-1+i$  を用いた。結果としては、初め  $k$  の刻みを 0.1 としたところ、出発点の付近で少し誤差が大きかったので、 $k=0 \sim 2$  までは 0.01 刻み、 $k=2$  から 32 まで 0.1 刻みで計算した。結果の一部を第 1 表に示す、右側の 2 行は誤差の目安として得られた  $x, y$  の値を (2.1) の左辺に代入して得られた実数部と虚数部の値である。

第 1 表

$k$	$x$	$y$	$u \times 10^6$	$vy \times 10^6$
0	-1.00000	1.00000	0.000	0.000
0.5	-0.60315	0.68736	-0.015	0.004
1.0	-0.27286	0.93410	-0.006	0.020
1.5	-0.13980	1.08438	-0.034	0.016
2.0	-0.04868	1.19608	-0.067	-0.007
5.0	0.25708	1.60456	-0.112	-0.048
10.0	0.52588	1.99166	-0.075	-0.052
15.0	0.70540	2.25993	0.194	0.017
20.0	0.84495	2.47264	0.834	0.829
30.0	1.06146	2.80852	1.940	2.640

$$\frac{dx}{dk} = \frac{-4(x+1)e^{-Lx} \cos Ly - y \sin Ly - kLe^{-Lx}}{4(x^2+y^2+2x+1) - 8kLe^{-Lx} \{(x+1) \cos Ly - y \sin Ly\} + 4k^2L^2e^{-2Lx}}$$

$$\frac{dy}{dk} = \frac{4(x+1)e^{-Lx} \sin Ly + y \cos Ly}{4(x^2+y^2+2x+1) - 8kLe^{-Lx} \{(x+1) \cos Ly - y \sin Ly\} + 4k^2L^2e^{-2Lx}} \quad (3.6)$$

を得る。これを (3.4) 式で  $k=0$  とおいたときの  $s$  の値

$$s = -1+i, -1-i$$

のうち、 $s = -1+i$  を初期値として用い、 $L$  の値は

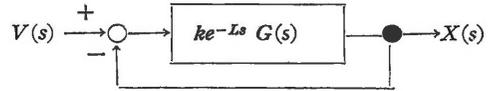
$$L = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 2.0$$

の各場合につき  $k=0$  から 0.1 刻みで 40.0 まで前回と同じく、ルンゲ、クッタ、ギル法で積分した。誤差の目安としての得られた  $x, y$  の値を (3.4) 式の左辺に代入した実数部分、虚数部分  $u, v$  は  $L$  が大きくなるとともに増加し、 $L=2.0$  のときは、 $k=40.0$  で  $u=0.019, v=-0.002$  の程度になった。ここでは  $L=0.6$  のときの一部を第 2 表に示す。

### §3 無駄時間を含む系の場合

ブロック線図として第 1 図の場合を考える。ただし  $L$  は無駄時間の遅れを表わす。

第 1 図



これより伝達関数は

$$\frac{X(s)}{V(s)} = \frac{ke^{-Ls} G(s)}{1 + ke^{-Ls} G(s)} \quad (3.1)$$

となり特性方程式として

$$1 + ke^{-Ls} G(s) = 0 \quad (3.2)$$

を得る。 $G(s)$  として

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \quad (3.3)$$

をとれば (3.2) は

$$s^2 + 2s + 2 + 2ke^{-Ls} = 0 \quad (3.4)$$

となり、 $s = x + iy$  とおき実数部分と虚数部分に分ける。前例と違う点は虚数部に  $y$  の因数がないことで

$$u(x, y; k) + iv(x, y; k) = 0 \quad (3.5)$$

の形になる。これより前例と同様に  $u_x, u_y, u_k, v_x, v_y, v_k$  を求めて

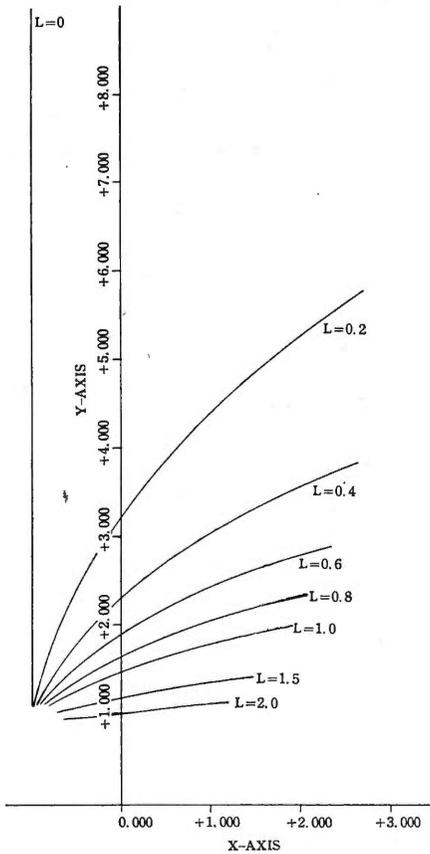
第 2 表

 $L = 0.6$ 

$k$	$x$	$y$	$u \times 10^6$	$v \times 10^6$
0	-1.00000	1.00000	0.000	0.000
2.1	-0.00101	1.92335	-8.48	1.14
	0.00	1.924		
2.2	0.02553	1.94042	-8.48	1.14
5.0	0.55660	2.24180	-8.51	1.15
10.0	1.08772	2.48620	-8.45	1.14
15.0	1.42847	2.62138	-8.42	1.05
20.0	1.68220	2.71323	-8.45	1.01
30.0	2.05517	2.83667	-8.35	0.82
40.0	2.32983	2.91993	-8.45	1.45

また、 $L$  の各場合についての  $x, y$  の値をデータとしてカーブプロッターにグラフを画かせたのが第 2 図である。

第 2 図



§4 前例のアナログコンピューターによるシミュレーション

微分方程式

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) + 2ky(t-L) = 0$$

$$y(0) = A, \quad \dot{y}(0) = 0 \tag{4.1}$$

を考える。両辺をラプラス変換して整頓すれば

$$Y(s) = \frac{As + A}{s^2 + 2s + 2 + 2ke^{-Ls}} \tag{4.2}$$

となり、その特性方程式は

$$s^2 + 2s + 2 + 2ke^{-Ls} = 0$$

となり (3.4) と同一の式である。ゆえにその一つの根  $s = x_1 + iy_1$  はすでにデジタルコンピューターにより求められている。そのとき  $\bar{s} = x_1 - iy_1$  も根であるから

$$Y(s) = \frac{B}{s - (x_1 + iy_1)} + \frac{C}{s - (x_1 - iy_1)} + \dots$$

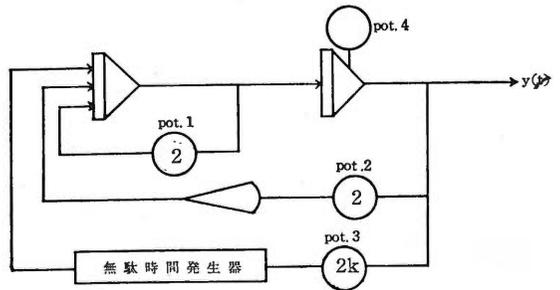
$$= \frac{D(s-x_1)}{(s-x_1)^2 + y_1^2} + \dots \tag{4.3}$$

の形となる。ただし  $B, C, D$  は定数。ゆえに

$$y(t) = De^{2i\omega t} \cos y_1 t + \dots$$

が得られる。 $x_1$  は減衰係数、 $y_1$  は角振動数を表わす。このデジタルコンピューターで得られた値をチェックするため  $L$  の諸値に対して  $x_1 = 0$  となる  $k$  の値を選んで、アナログコンピューターで  $y(t)$  を描かせた。(4.1) より導いたブロックダイアグラムを第3図に示す。

第 3 図

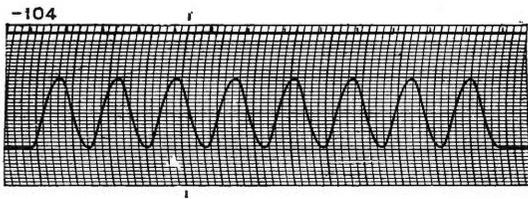


実際には無駄時間発生器のゲインがはっきりしないので pot.3 を定常振動が発生するように調節し、遅れの時間  $L$  は  $y(t)$  と  $y(t-L)$  を記録紙に描かせて校正した。そのようにして振動を記録しその角振動数  $y_1$  を求め、先に求めた  $y_1$  の値と比較してみた。その結果は第3表に示す。表からわかるように  $L$  の小さい方で誤差が大きくなっているが、これは無駄時間をセットするとき  $L$  が小さくなる程相対誤差が大きくなる為と思われる。次に第4図に  $L=0.6$  の場合の定常振動を示す。線図を見るときなめらかな正弦曲線となっており  $s = x_1 \pm iy_1$  以外の根の影響はほとんどないものと思われる。

第 3 表

L	$y_1$	$\bar{y}_1$	誤差 %
0.2	3.248	3.325	2.4
0.4	2.335	2.383	2.0
0.6	1.924	1.937	0.7
0.8	1.671	1.675	0.2
1.0	1.493	1.492	0.1
1.5	1.200	1.200	0.0

## 第 4 図



## 2. あとがき

無駄時間のある系の特性方程式は超越方程式であるから根は無数あるはずであり、その辺の吟味もすべきであるが今回ははたせなかった。最後にこの研究について懇切な御指導を賜った九州大学の高田教授に深く謝意を表します。

# 格子熱伝導度の理論計算

永田達郎  
石崎勝典

<昭和44年9月30日受理>

## Theory and Numerical Calculation of Lattice Thermal Conductivity

We examined the difference of the lattice conductivity between on using the Debye's approximate distribution and on using the precise distribution as the frequency distribution of phonon in the solid.

Using Pippard's theory on the ultrasonic attenuation in metals, we formulated the lattice conductivity for copper, alike Lindenfeld and Pennebaker, and examined the efficiency of the Debye approximation.

We formulated the lattice conductivity for the longitudinal and transversal modes and for the one-dimensional lattice, and the anisotropic lattice conductivity, separately.

Tatsuro Nagata, Katsunori Isizaki

### §1. 緒言

固体の本質を調べるのに、最近核磁気共鳴 (NMR) とか、電子スピン共鳴 (ESR)、X線回折、電子線回折更には中性子線回折、Mössbauer 効果等々の測定が行われていて賑やかであるが、古くからある古典的方法であるところの熱膨張係数、弾性率、比熱、熱伝導、電気抵抗等の測定の重要性は少くも無くなってはいない。むしろ熱に関係する実験は、簡単に行えないだけに、正確な信頼できる実験が少ないので、大いにやらねばならない。そして正確なデータを沢山集めなければならない。

一般に熱に関する実験は非常に労力が使われる割には、正確な値が得られないものである。考えている系が熱的に非平衡状態にある時、それが熱平衡に達するまでには相当に長い時間を要する。まだ平衡状態に達していない時に、そう思って測定することが多いのである。しかし、こゝに非平衡状態を扱う理論があれば問題はない訳であるが、非平衡状態の系に対する物理はまだ緒についたばかりで、それを取り扱う理論の確立は、平衡状態に達するに要する時間よりも、もっともっと長い時間を要するであろう。

熱伝導の現象は非平衡状態の性質を扱うものであり、輸送現象と称する物理の一部門の理論を援用しなければならない。何を輸送するかによって、粘性、拡散、熱伝導、Brown 運動と分かれる。こゝで扱おうとする熱伝導は熱エネルギーの輸送の現象である。

輸送現象そのものの複雑さから、理論的には、真正面から取り組むことはまず不可能である。従って、色々の条件の下に単純化して取り扱っている。古くには Einstein の有名な Brown 運動の理論、粘性係数の理論がある。その後、沢山の人が Brown 運動を論じているが、Chandrasekhar<sup>(1)</sup> の労作により、一応我々が利用したい条件の範囲では間に合うものが用意されている。

この熱エネルギーを運ぶものは何であるか。粒子の場合もあるだろうが、固体を考える限り、考えられるのは格子である。即ち、格子によって熱は伝わるのである。また、金属の場合には、自由電子も熱を運んでくれる。格子を伝わる熱は、一般にフォノン (phonon) によるものとして扱う。光子 (photon) と同じように振動数が  $\nu$  なら、そのフォノンのエネルギーは  $h\nu$  である。このフォノンが固体内を自由に動きまわることにより、熱が運ばれる。勿論、お互に衝突があるので、話しは、そう簡単ではない。多数あるフォノンの集団は光子と全く同じ Bose-Einstein の統計に従う。ところが、固体では、その振動数分布は自由ではなくて、夫々の結晶系、元素によって全く違っている。

これも古く固体の比熱の理論で使われた Einstein の分布があり、量子論の応用面における最初の輝かしい成功となっているが、これは全部の振動子 (即ちフォノン) が単一の等しい振動数をもつとしている。単一モード

(mode)である。その次に、この理論をもっと正確にしたものに Debye の理論があり、分布は振動数の2乗に比例するようになっていて、その最大の振動数は、その分布数が全体で有限であることから定められている。殆んどの場合、特に低温では、Debye 近似は非常に良く実験値と一致している。従って、正確な振動数分布がわからない時には勿論であるが、正確なものがわかっている時にでも、Debye 近似で計算して、良く実験値を説明している。この近似は本質的には、結晶格子を考えているが、結晶の方向性等は考えない所謂連続体近似である。すべてをまだ平均で置き代えているという欠点も持っている。正確な振動数分布と Debye 近似による振動数分布とでは、振動数が小さい時は良く一致しているが、大きくなるにつれて、ずれは大きくなっていく。この振動数分布を求めるには、粒子間の相互作用の大きさがわかっているなければならないが、この力の定数がわからない為に、振動数分布が求まっていないものの方が多い。

熱伝導を扱うのに、輸送現象をもっとも初めに取り組むのが本道と思われるが、我々はそれは先人の業績をそのまま受け継ぐことにして、ここでは振動数分布に目を向けてみた。

熱がフォノンによって運ばれる物質の格子熱伝導度の問題は多く研究されているが、問題の正確な取り扱い、結晶の振動数分布や非調和力についての知識が不足していることと、Boltzmann 方程式の正確な解を得ることの困難さによって妨げられている。従って、簡単にしたモデルを使って、これらのことは行われている。その中、平均の(音響)分枝よりなる Debye のフォノン・スペクトルを仮定し、更に3-フォノン散乱緩和時間の形として幾つかの仮定をした Callaway<sup>(2)</sup> のモデルは多くの物質に応用されて、成功している。Callaway のは低温での格子熱伝導度を説明する現象論的モデルであり、Boltzmann 方程式を解くのに、熱平衡状態で成り立つ粒子の分布を使用している。

Klemens<sup>(3)</sup> は熱がフォノンによって運ばれる時の、物質の熱伝導度に関する詳細な理論を与えている。低温ではフォノンは結晶の表面で散乱される。そして、その境界散乱は、結晶の形と大きさによって決められる平均自由行路のときに優勢となる。熱伝導度は温度が上昇して行くにつれて大きくなり、ある温度で最大となる。その温度以上になると、フォノンによってフォノンが散乱されるようになり、熱の輸送が妨げられるようになる。熱伝導度が最大となるような温度の近くでは、伝導度は転位、同位元素、歪場のような欠陥や、不純物などに敏感である。又電子-フォノン散乱と、不純物による局所モード (localized modes)\* による共鳴散乱も存在するというを示している。

Lindenfeld と Pennebaker<sup>(4)</sup> は銅の格子熱伝導度を求めているが、彼等の計算には Pippard<sup>(5)</sup> の理論を使っている。そして、横と縦のモードはお互いに殆んど独立に電子と相互作用しているとして、電子とフォノンとの相互作用を扱っており、純粋な試料に対しては、伝導度は主として横のモードに依存するという結果を得ている。さらに、その中では転位も考慮されている。

超伝導の鉛に対する熱伝導度の計算については Ambegaokar と Woo<sup>(6)</sup> が行っている。彼等は振動数分布と結合定数とを Swihart, Scalapins と Wada<sup>(7)</sup> のモデルからとっている。分布関数は Lorentzian 型にとり、結合定数は振動数に無関係としている。しかし実験結果との一致はかなり良い。

カリウム-セシウム合金と純カリウムの熱伝導度を Archibald 等<sup>(8)</sup> が測定していて、その測定結果を説明するのに、金属中の超音波減衰に関する Pippard<sup>(5)</sup> の理論が用いられている。低温において横波モードが重要な効果を持つことを示している。

Baarle と Huebener<sup>(9)</sup> は金-白金合金の格子熱伝導度と空孔との関係を調べている。

低温での合金の熱伝導度の測定は、伝導電子とフォノンとの相互作用について有用な知識を得ることが出来るので、非常に面白いものである。銅、銀、インジウム合金に関する格子熱伝導度の結果は Pippard<sup>(5)</sup> によって展開された金属における超音波減衰に関する理論を用いて、殆んど完全に説明できた。この理論によると、フォノンと電子間の相互作用の強さは、電子の平均自由行路の相対的大きさと、フォノンの波長に依存している。電子の平均自由行路  $l$  と平均フォノン波数  $q$  との積が  $l$  より小さい ( $ql < l$ ) とき、残留抵抗と温度とに対して、自由電子近似では、理論と実験との一致は 20%以内である。 $ql$  が大きい値のときは、食い違いは、 $4^\circ K$  の近くまで段々と大きくなり、 $5\mu\Omega\text{-cm}$ 、あるいは、それ以下の残留抵抗に対して、実験結果は、理論曲線と少くとも 2~5 の因子だけずれている。希薄合金に対するこの食い違いは、Fermi 面からの効果であろうと Pippard は考えている。 $ql \gg l$  の領域ではせん断波に対する電子とフォノンとの結びつきは、Fermi 面の形に敏感である。

今まで研究された金属の Fermi 面が、せん断波に対するフォノンと電子との結合の強さにどう変化を与えるかはわかっていない。その為に、自由電子モデル以外のモデルに対する格子熱伝導度の大きさと温度依存性を計算す

ることは、今のところ不可能であるので、殆んど球状の Fermi 面をもつ金属の格子伝導度を測定することが重要である。従ってアルカリ金属の測定は、この意味において重要と言える。

半導体についてみると、Ge-Si 合金の高温における熱伝導度を Bhandari と Verma<sup>(10)</sup> が計算をしている。そして約 800°K まででは、フォノンからの寄与が、良く実験結果を説明することを示して、それ以上の温度では、フォノンの寄与が熱抵抗に温度上昇と共に増加するのに反し、電子の寄与は減少するから、熱抵抗の温度に対する曲線にピークが出来ることを説明している。さらに彼等は縦と横のフォノンが GaAs と InSb の格子熱伝導度においてどんな役割をしているかについての計算も行っている<sup>(11)</sup>。彼等の用いた振動数分布は非常に簡単なものであるが、Debye の振動数分布を用いた Callaway の式よりも実験とよく一致している。従って振動数分布をもっと実際に近いものを用いれば、もっと良くなるだろうことが期待される。Callaway の現象論的モデルは、800°K から融点までの温度での格子熱伝導度の温度依存性を説明することは出来ない。高温での実験データと理論曲線とを一致させようとすると、他の温度で実験結果と食い違ってくる。横波フォノンは熱伝導に重要な役割を演じていることがわかった。もし横波と縦波フォノンとの寄与を別々に計算して、フォノンによる全熱伝導度を計算するなら、Si と Ge における格子熱伝導度の全体の温度依存性は非常によく説明できる。高温での熱伝導は横波フォノンによるという結論は、Si-Ge 合金の場合に支持され、また InSb と GaAs に対しても支持されている。

ビスマス—アンチモン合金系の単結晶の熱伝導度を Yazaki<sup>(12)</sup> は測定し、アンチモン—砒素系については Ooyama<sup>(13)</sup> が測定している。*n* 型半導体の Mg<sub>2</sub>Sn の熱伝導度を Martin と Danielson<sup>(14)</sup> が測定し、150°K より上では熱伝導度は  $T^{-1}$  の形で温度に依存していることを見出している。この依存性は格子熱伝導度の特長を持つものである。Si の熱伝導度を Fulkerson 等<sup>(15)</sup> は 90~1328°K の温度範囲で測定している。熱抵抗の曲線の傾きが約 670°K で急に変化しているが、その理由は不明である。

希土類元素については、その種々の性質があって面白い研究問題であるが、余り数多くの研究は行われていない。希土類ハライドとして CeH<sub>2</sub> の伝導度を Heckman<sup>(16)</sup> が測定している。Dy, Er, Lu 単結晶の熱伝導度を Boys と Legvold<sup>(17)</sup> が測定して、Lorentz 関数を計算したところ、純粋に電子によるものから期待される値より大きかった。これはフォノンとマグノンの両者か、またはどちらか片方の寄与が、熱伝導には僅かにしかないことを示している。

Worlock<sup>(18)</sup> は銀のコロイドを含んでいる塩化ナトリウムの熱伝導度を測定している。純粋な非金属単結晶の熱伝導度は Debye 温度の 1/25 の近くの温度に極大値がある。そして、この温度のすぐ下の近くでは熱伝導度は結晶の化学的および構造の完全性に極端に敏感である。点欠陥に熱伝導度は敏感である。点欠陥は断面積  $\sigma$  が振動数  $\omega$  の 4 乗に比例して ( $\sigma \propto \omega^4$ ) フォノンを散乱することが期待されるから、低温ではなくなることが期待される。アルカリ・ハライド結晶中に 2 価の不純物が入っている時の熱伝導度を Schwartz と Walkers<sup>(19)</sup> が測定している。析出があると、転位と積層欠陥によるフォノン散乱が支配的であることを見出している。

低温における熱伝導度の測定は、フォノンと格子欠陥との間の相互作用を研究する目的で盛んに用いられている。フォノンと共鳴相互作用をする点欠陥に焦点が絞られる。不純物が結晶中にあると、格子のモードに新しい振動のモードが生ずる。かゝる不純物のモードがバンドの内であれば、そのモードはフォノン・モードと多少強く結合する。すると、不純物モードの寿命は非常に短くなる。そしてフォノンの共鳴散乱は鋭いものになる。従って、不純物を含む結晶の共鳴振動数、共鳴の巾や強さを調べることは重要な仕事となる。

Fox 達<sup>(20)</sup> は超伝導状態にある In-Pb 合金の熱伝導度を 0.4°K まで測定して、1°K の近くに極大があることを示し、それはフォノンが電子による散乱から、境界散乱、点欠陥散乱に移ることに原因があることを推論している。

Kusunoki 達<sup>(21)</sup> は Cu-Al 合金結晶に塑性変形を与えて、液体ヘリウム温度での熱伝導を測定している、即ち転位によるフォノンの散乱を調べる目的で、1.6~4.2°K の温度範囲で格子熱伝導度は下に凸の曲線になっている。この結果を電子—フォノン相互作用による散乱のほか、Cottrell 状態にあって振動している刃状転位による共鳴散乱で解釈している。なおイオン結晶では、熱伝導度を測定した結果、転位によるフォノンの散乱断面積は Klemens, その他<sup>(22)</sup> による理論値と約千倍ものちがいがあ。一方、面心格子構造の固溶体合金では相当にこの違いは小さい。いずれにして転位による影響はまだよく理解されているとは言えないようである。

正常状態の熱伝導度と超伝導状態の熱伝導度とをカドミウムをドーブ\*\*した Sn の単結晶について 1~4°K の温度範囲で Gueths 等<sup>(23)</sup> は測定している。そして正常状態に対しては Lindenfeld 達<sup>(4)</sup> が与えた希薄合金の格子熱伝導度に対する曲線と定性的にも定量的にも良く一致している。超伝導状態の格子熱伝導度と正常状態の格子熱伝導度との比は、Klemens 等<sup>(24)</sup> が、電子によるフォノンの散乱に対して計算したものと良く合っている。低温で

不純物濃度が固溶限に近づくと、別の格子熱抵抗が超伝導状態には観測されている。そして、この抵抗の大きさは不純物濃度が増加すると共に増加している。

ドーブしたものと純粋な  $CdS$  単結晶について、 $1.4\sim 80^\circ K$  の温度範囲で、Moore 達<sup>(25)</sup>は熱伝導度を測定している。純粋な結晶は六方晶であるのに異方性を示さず、Debye 近似を用いた Callaway<sup>(2)</sup> の現象論的式を用いて解析し成功している。そのときフォノン、境界、同位元素による散乱を仮定している。不純物と同様に転位によるフォノン散乱を仮定した Callaway の式は、 $Se$  をドーブした結晶に対する実験結果に良く合っている。低温での熱伝導度は  $T^2$  に比例しており、これは静止した転位によるフォノン散乱によるものであることを示している。

Baumann 達<sup>(26)</sup> はアルカリ・ハライド中に  $Li$  を含んだものの熱伝導度を測定している。これも実験は共鳴散乱を調べており、共鳴の形は低振動数では  $\omega^2$  の形で変化する  $\frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$  の形の Lorentzian 型でよく表わされることを示している。

$MgO$  中に  $Fe$ -イオンが入っている時に、熱伝導度が磁場にどう依存するかを Fox 達<sup>(27)</sup> が実験している。その結果フォノンの共鳴吸収は  $Fe^{2+}$  イオンの基底状態の三重項における  $4M=1$  と  $4M=2$  遷移であることが観測されている。

最後に理論について述べよう。

Ranninger<sup>(28)</sup> は格子力学の非平衡の性質を、特に格子熱伝導度の計算を扱っている。原子間の格子ポテンシャルを対角線の部分と非対角線の部分とに分けて、熱伝導度に対して結晶格子の平衡と非平衡の性質からの効果を別々に調べている。Debye 温度の附近と、すぐ上の温度に対して、格子熱伝導度の温度依存は  $\frac{1}{T(1+\alpha T)}$  の形を与え、伝導度に極小の出ることを予言している。

1次元と2次元格子モデルでのエネルギー輸送の数値計算を Payton 達<sup>(29)</sup> が行っている。彼等は最近接のみ取り、調和と非調和の力を考え、2種類の原子が無秩序に混合しているとして扱っている。調和格子によるよりも、非調和格子の方が大きい熱伝導度を与える。

Gruner<sup>(30)</sup> は熱伝導度と刃状転位との関係を論じている。一個一個離れている転位とフォノンとの相互作用を考えると格子熱伝導度は温度の2乗に依存するのに、刃状転位の双極子とフォノンとの相互作用による散乱は、それと違っている。フォノンの波長  $\lambda_n$  が双極子を作っている2つの刃状転位間の距離  $R$  に比べて大きい温度では、伝導度は絶対温度  $T$  に殆んど無関係であり、離ればなれの転位の時の値より大きい。温度が上昇すると、即ち  $R \gg \lambda_n$  になると、双極子による熱伝導度は離ればなれの転位のときの伝導度に近づいて行く。フォノンと双極子との相互作用は非線型連続理論によって扱われている。

以上で現在までにどんなことが行われ、また考えられてきたかを概観した。これは手近かにあって手に入ったものだけであるから全般的なものでないことは勿論であるが、一応の状況は掴むことができよう。

以下、次節では熱伝導度を与える理論式の導入を行なう。最も基本的な初歩的なところから始める。その次に銅に対する振動数分布<sup>(31)</sup> がわかっているから、それを用いて熱伝導度を計算する。ただし、振動数分布を滑らかな曲線で置き換えて行なう。振動数分布の計算されたものは非常に少ないことが、我々の計算にも影響があり、数多くの物質についての熱伝導度を求めようとするを不可能にしている。また、ここで2次元の正方格子については振動数分布の厳密解<sup>(32)</sup> が求められているので、それを用いると、格子の熱伝導度も、平面物質については理論と実験との面白い比較ができると思われる。たゞ平面格子の熱伝導をする結晶が存在するであろうかという問題がある。平面格子の熱伝導度の計算も提出する積りである。

## § 2. 熱伝導度の定義と理論

不均一に加熱された物体では、熱が物体の高温部から低温部へ移ることによって温度が均一化される。その為に物体には熱流が生ずる。断面積  $AS$  を垂直に通って、 $dt$  時間に流れる熱量  $dQ$  は、その点の温度勾配に比例する。温度勾配は  $dT/dx$  で与えられるから

$$dQ = -K \frac{dT}{dx} \cdot AS \cdot dt.$$

従って単位時間に流れる熱量は

$$\therefore \frac{dQ}{dt} = -K \frac{dT}{dx} \cdot AS$$

$\Delta t \rightarrow 0$  の極限では、 $\Delta x \rightarrow 0$  として

$$-\frac{dQ}{dt} = -K \frac{dT}{dx} \cdot \Delta S$$

若し、 $\Delta S$  の法線が熱流と  $\theta$  の角度をなせば、 $\Delta S$  のところを  $\Delta S \cdot \cos \theta$  とすればよい。符号の-は温度勾配と逆の方向に熱は流れるからである。

単位面積 ( $\Delta S = 1$ ) を垂直に通って、単位時間流れる熱量は

$$-\frac{dQ}{dt} = -K \frac{dT}{dx}$$

で与えられる。こゝで比例定数  $K$  のことを熱伝導度と呼んでいる。上式より熱伝導度  $K$  は大ききで書くと

$$K = -\frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dT}{dx}} = \frac{dQ}{dT} \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

熱を運ぶものが電子であるとすれば、 $Q$  は電子の熱容量であり、 $-\frac{dQ}{dT}$  は電子の定積比熱となる。 $-\frac{dx}{dt}$  は電子が熱を運ぶ速さとなる。その速さも、お互い同志の衝突や、相互作用（これも衝突の一種である—非弾性衝突）があるから、それぞれの速度そのものではない。

熱を運ぶものが格子であれば、 $\frac{dQ}{dT}$  は固体の定積比熱である。その理論は、Einstein によって輝かしい成功を得たものに始まる。 $-\frac{dx}{dt}$  は格子を伝わる振動の伝播速度であるから超音波の伝播速度となる。熱が伝われば、エネルギーは散逸して行くから、振幅は減少して行くはずである。超音波の減衰を調べることは、この熱伝導には重大な働きを持っている。

また、音というより固体を伝わる弾性波には縦波もあれば横波もある。

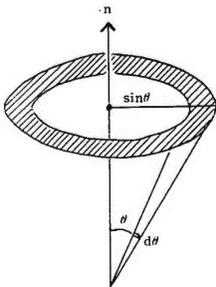
このように熱を運ぶものには、色々の種類があるから、お互に独立なら

$$K = \sum_i \frac{dQ_i}{dT} \frac{dx_i}{dt} = \sum K_i \quad (2)$$

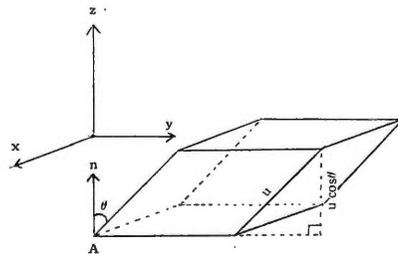
熱を運ぶものが、古典的気体粒子であるとしよう。実はこの考えは固体の格子による熱伝導に応用できるのである。それには、格子振動をフォノンで置き代えて考えればよい。フォノンを古典的気体粒子なみに扱うことができるからである。しかしフォノンの考えは古典的な考えからは得られないものである。格子振動を量子化してフォノンが得られるから、全く新しいものであるが、一旦量子化されて粒子の像を持てば、古典的粒子と同じように扱えるという便利さがある。フックの法則に従った、格子間の相互作用が存在するときは、相互作用のないフォノンが対応し、それからずれた非線型の相互作用が格子間に働いている時は、フォノンの間に相互作用があることに対応する。

有限の熱伝導度となる為には、フォノン間に相互作用がなければならぬ。従って、古典的粒子としても、何等相互作用のない、即ち理想気体の粒子の理論を持って来ては不十分であるが、このような理想気体に対する理論を持って来て熱伝導度の計算に適用しても、さして差支へないことがわかっているから、我々も理想気体についての結論を利用することにしよう。理論をもっと完全にするには、不完全気体に対する熱伝導の式を利用しなければならぬことは言うまでもない。

第 1 図



第 2 図



さて、古典論の式を導いておこう。(83)

1つの面 ( $xy$ 面) 上の単位面積  $A$  を考える。分子の速さはすべて一定で  $u$  とする。面  $A$  の法線  $n$  に対し、 $\theta$  と  $\theta + d\theta$  の間の方向に運動している分子数は全分子数の

$$\frac{2\pi \sin\theta d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta$$

倍である。分子はあらゆる方向に同等であるから、斜線の部分の面積が、半径1の球面の何分の1に当るかを計算すればよい。全体は  $4\pi$  であり、斜線の部分の面積は  $2\pi \sin\theta d\theta$  であるから上式が得られる。

この角度で面  $A$  を通過する分子数は、1秒間には図の斜めの六面体内の部分にあって、 $\theta$  方向を向いている粒子数である。体積は  $I \times u \cos\theta$ 、単位体積当り  $n$  個とすると、この体積中の粒子数は  $nu \cos\theta$  となる。この中  $\theta$  方向を向いているのは、

$$nu \cos\theta \times \frac{1}{2} \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} nu \cos\theta \sin\theta d\theta$$

今、これらの粒子の平均自由行路を  $\lambda$  とすると、 $A$  の面でエネルギーを授受するには、その前に  $\lambda$  だけ離れたところの粒子と衝突して、その点のエネルギーを持ってくる。即ち  $\lambda \cos\theta$  だけ上の面のエネルギーを持ってくる。粒子1個当りの平均のエネルギーを  $E(z)$  とすると

$$E(z) = E(0) + \frac{\partial E}{\partial z} \lambda \cos\theta$$

だから、 $A$  面では  $\frac{\partial E}{\partial z} \lambda \cos\theta$  のエネルギーを与えることになる。

単位時間に面  $A$  を通過する流れによるエネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \int_0^\pi \frac{1}{2} nu \cos\theta \sin\theta d\theta \cdot \frac{\partial E}{\partial z} \lambda \cos\theta \\ &= \frac{1}{2} nu \lambda \frac{\partial E}{\partial z} \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} nu \lambda \frac{\partial E}{\partial z} \end{aligned}$$

一方 (大ききで書くと)

$$\frac{dQ}{dt} = K \frac{\partial T}{\partial z}$$

だから

$$K \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{3} nu \lambda \frac{\partial E}{\partial z}$$

さらに

$$\begin{aligned} n \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\partial(nE)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \\ &= C_v \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} K \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{1}{3} u \lambda C_v \frac{\partial T}{\partial z} \\ \therefore K &= \frac{1}{3} u \lambda C_v \end{aligned} \quad (3)$$

緩和時間  $\tau = \frac{\lambda}{u}$  を導入すると

$$K = \frac{1}{3} \tau u^2 C_v \quad (3)'$$

(3) または (3)' が古典論による熱伝導度を与える式である。粒子の速さは皆同一としたが、Maxwell-Boltzmann の分布に従うとしても全く同じ式をうる。

(3) または (3)' によってわかるように、熱伝導度  $K$  を求めるには、粒子の平均の速さ  $u$ 、平均自由行路  $\lambda$ 、または緩和時間  $\tau$  と、熱を運ぶ粒子 (または準粒子) の熱容量  $Q$ 、または比熱  $C_v$  とを求めなければならない。

まず、定積比熱  $C_v$  から始めよう。

粒子の分布が  $g(\omega, T)$  に従うとする。即ち、温度が  $T^\circ K$  のとき、振動数が  $\omega$  (正しくは  $\frac{\omega}{2\pi}$ ) であるような、すなわちエネルギーが  $\hbar\omega$  であるような値をとる確率が  $g(\omega, T)$  であるとする。ここで  $\hbar$  は Planck 定数  $h$  を  $2\pi$  でわったもの  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  である。そして、 $\omega$  と  $\omega + d\omega$  の間にあるモードの数を (振動数の分布状態の数を)  $C(\omega)d\omega$  とすると、 $\omega$  と  $\omega + d\omega$  の間にある粒子が  $\hbar\omega$  のエネルギーを  $T^\circ K$  のときにとる期待値は

$$\hbar\omega g(\omega, T) C(\omega) d\omega$$

であるから、全体では、平均エネルギーは

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} \hbar\omega g(\omega, T) C(\omega) d\omega$$

で求められる。この中で温度  $T$  に関係があるのは、 $g(\omega, T)$  のみであるから、比熱は

$$C_v = N \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = N \int_0^{\infty} \hbar\omega \frac{\partial g(\omega, T)}{\partial T} C(\omega) d\omega$$

で与えられる。ここで  $N$  は全粒子数である。比熱の  $C_v$  とモードの分布を与える  $C(\omega)$  とを混同しないように注意して欲しい。また、もし Debye 近似を採用するときには積分の上限は  $\infty$  でなくて有限で切れる。上限  $\omega_D$  は、 $N$  を単位体積当りの原子の数としたとき、モードの総数が  $3N$  になるという条件

$$\int_0^{\omega_D} C(\omega) d\omega = 3N$$

から決定される。

比熱を求めるには、粒子の分布則  $g(\omega, T)$  と、モードの分布則  $C(\omega)$  とを求めなければならない。 $g(\omega, T)$  は量子論に従う粒子に対しては Bose-Einstein 分布 (B-E 分布), Fermi-Dirac 分布 (F-D 分布) のどちらか、古典的粒子に対しては Maxwell-Boltzmann 分布 (M-B 分布) である。我々が扱うものは電子かフォノンであるから、電子に対しては F-D 分布, フォノンに対しては B-E 分布であるが、どちらにしても高温を考えるとときには、M-B 分布でも間に合う。これらに対する式は

フォノンに対しては (B-E 分布)

$$g(\omega, T) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_0 T}} - 1} \quad (4)$$

電子に対しては (F-D 分布)

$$g(\omega, T) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega - E_F}{k_0 T}} + 1} \quad (4)'$$

である。ここで  $E_F$  を Fermi エネルギーと呼んでいる。我々が扱う限りの高温では、まだ M-B 分布を使う程高くないので、M-B 分布は省略する。 $k_0$  は Boltzmann 定数である。

次に  $C(\omega)$  である。これはわかっていない。全然わからないというよりも、計算が面倒くさくて実行出来ないでいるというのが本当であろう。 $C(\omega)$  を求めるには、原子間の相互作用、即ち格子間の相互作用がはっきりとわかっていなくてはならないが、原子間力が不明な為に、 $C(\omega)$  は計算できないでいる。原子間力をパラメーターとして残したままでも求められれば良いが、それも 2 次元格子までである。それにしても有限の大きさでは、境界のところは内部とは全然違った状態にある為に、計算が可能になるように変形をして解いているか、無限大の格子として解いているのが現状である。3 次元格子ではもっともっと複雑であるから、近似式で<sup>(84)</sup>表わされることが多いのはやむをえない。

これに対して、Debye は弾性体近似として扱い、次の式を出している。これからさきは格子熱伝導度の理論になる。

$$C(\omega) = A\omega^2 = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} \right) \omega^2 \quad (5)$$

ここで、 $v_l$  は縦波 (longitudinal wave) の伝播速度、 $v_t$  は横波 (transversal wave) の伝播速度である。この式も

$$\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} = \frac{3}{v_s^3}$$

なる  $v_s$  を導入して

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{3}{v_s^3} \omega^2 \quad (5)'$$

で扱われることが多い。この近似は温度が余り高くない限り非常に良い近似であることはわかっている。従ってこの近似は非常に良く使用されている。普通の金属では室温は低温の方に属しているから、この Debye 近似は有効である。高温と低温を分けることは、Debye の特性温度で定め、その温度より高ければ高温になり、それに従う粒子は古典的に扱ってよく、一方その温度より低ければ低温になり、古典的粒子としては扱えなくなる。例えば銅では  $339^\circ\text{K}$ <sup>(85)</sup>である。

粒子によって分布が異なり、同じ粒子にもモードの違いがあるから、比熱の式を (3) または (3)' に入れて、色々の種類についての和をとることにより、熱伝導度を与える式は次のようになる。

$$K = \sum_i \frac{N_i}{3} \int_0^\infty \tau_i u_i^2(\omega) \cdot \hbar\omega \frac{\partial g_i(\omega, T)}{\partial T} C_i(\omega) d\omega \quad (6)$$

もし Debye 近似をとるときは、積分の上限は  $\omega_D$  までであることは前述の通りである。

今までの話から、(6) 式で議論されていないのは、緩和時間  $\tau_i$  と伝播速度  $u_i(\omega)$  である。これらと振動数分布  $C(\omega)$  が定められるなら、(6) 式より熱伝導度  $K$  を求めることが出来る。

格子振動は一般に音響振動と、光学的振動の2種類(分枝)があり、我々が現在考えている熱伝導に関するものは音響振動の方である。それは、Debye 温度より低い温度を考えているから、

$$\begin{aligned} \hbar\omega &\leq k_0 T \\ \therefore \omega &\leq \frac{k_0 T}{\hbar} \end{aligned}$$

波数ベクトルを  $q$  とすると、 $q = \frac{\omega}{u}$  だから、

$$q \leq \frac{k_0 T}{\hbar u}$$

を満たすフォノンのみが存在する。これより高い振動数の振動モードは励起エネルギーが大き過ぎるため存在しない。従って勿論光学的振動のモードは全くないと見てよい。この結果から、Fermi 準位近くの電子は、低温では小角度の散乱のみを受けるといえる。<sup>(86)</sup>

Fermi 準位近くの電子が1個のフォノンと衝突する場合から導いておこう。入射電子の波数ベクトルを  $k$ 、反射電子の波数ベクトルを  $k'$ 、フォノンの波数ベクトルを  $q$  とすると、運動量はそれぞれ  $\hbar k$ 、 $\hbar k'$ 、 $\hbar q$  であり、エネルギーはそれぞれ  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 、 $\frac{\hbar^2 k'^2}{2m}$ 、 $\hbar\omega$  であるから、エネルギー保存の式は

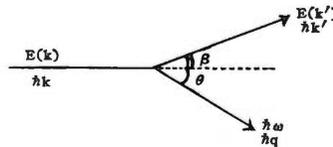
$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + \hbar\omega$$

運動量保存の式は

$$\hbar k = \hbar k' + \hbar q$$

で与えられる。

第 3 図



運動量保存の式を入射電子の進入方向と垂直方向とに分けると、

$$\begin{cases} k = k' \cos\beta + q \cos\theta \\ k' \sin\beta = q \sin\theta \end{cases}$$

この2式から  $\theta$  を消去すると

$$k^2 + k'^2 - q^2 = 2kk' \cos\beta = 2kk' \left( 1 - 2\sin^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\therefore \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{2kk' - k^2 - k'^2 + q^2}{4kk'}}$$

Fermi 準位近くの電子エネルギーは、フォノンのエネルギーより大きいから

$$k \doteq k' > q$$

となり

$$\sin \frac{\beta}{2} \doteq \sqrt{\frac{q^2}{4k^2}} = \frac{q}{2k}$$

$$\therefore \beta \doteq \frac{q}{k}$$

従って、電子の散乱角  $\beta$  は小さいことがわかる。

この音響近似では、伝播速度  $u$  は  $u = \frac{\omega}{k}$  から求められる。エネルギー等の実体を運ぶのは群速度であるから  $u = \frac{d\omega}{dk}$  で求める方が正しいが、温度が高くない限り  $\omega \propto k$  であるから、どちらで求めても差支はない。

振動数分布を求める際、我々は一般に  $\omega = f(k)$  の形の式をうる。これから  $k = F(\omega)$  を求めればよいが、これが求められない。従って、 $C(\omega) d\omega$  よりも  $D(k) dk$  の形に表わしておく方がよい。すると、 $f(k) = D(k)$  とおいて

$$\begin{aligned} C(\omega) d\omega &= D(k) dk \\ &= D(k) \frac{dk}{d\omega} d\omega \end{aligned}$$

だから、 $C(\omega) = D(k) \frac{dk}{d\omega}$  と置けばよいことになる。

(6) 式は次の様書き直される。

$$K = \sum_i \frac{N_i}{3} \int_0^\infty \tau_i u_i^2(\omega) \cdot \hbar \omega \frac{\partial g_i(\omega, T)}{\partial T} D_i(k) dk \quad (7)$$

今、波数が  $k$  と  $k + dk$  の間のモードの数を  $w(k) dk$  とおくと、半径が  $k$  と  $k + dk$  の間の同心球の間にあるモードの数は、その体積が  $4\pi k^2 dk$  であり、格子定数は  $\frac{2\pi}{L}$  だから、 $\frac{4\pi k^2 dk}{(\frac{2\pi}{L})^3} w(k)$  となり、単位体積に

ついては  $L^3$  でわって

$$\frac{4\pi}{(2\pi)^3} k^2 w(k) dk$$

となる。Debye 近似では  $w(k) =$  一定である。

従って

$$K = \sum \frac{N_i}{3} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \tau_i u_i^2(k) \hbar \omega_i(k) \frac{\partial g_i(\omega_i, T)}{\partial T} k^2 w(k) dk \quad (8)$$

もし、平面格子を考えるなら

$$\frac{2\pi k dk}{(\frac{2\pi}{L})^2} w(k) \frac{1}{L^2} = \frac{2\pi}{(2\pi)^2} k w(k) dk$$

だから

$$K = \sum \frac{N_i}{3} \frac{2\pi}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \tau_i u_i^2(k) \cdot \hbar \omega_i(k) \frac{\partial g_i(\omega_i, T)}{\partial T} k w(k) dk \quad (8)'$$

(8) や (8)' は、一面にぬりつぶして、異方性がないときのものである。実際の結晶は、異方性があるから、単結晶の場合には、これらの式は使えない。普通の多結晶については、これらの式は使えるものと思われる。しかし、(8)' の方は、実際の結晶には対応するものがないのではなからうか。

これらの熱伝導度の式を導くのに使った最大の仮定は、フォノン同志の間の相互作用がない、即ちフォノンの集団が理想気体の粒子と同じであるとしたことである。

理想気体からのズレは、緩和時間  $\tau$  や伝播速度  $u$  を定めるところで考慮して行こうとするのである。

### §3. 銅の格子熱伝導度

我々は前節で格子熱伝導度に対する一般式を導いておいた。それで我々の手に入る振動数分布を用いて、実際の

金属について計算を行ってみた。Varshni と Shukla<sup>(37)</sup> によって計算された Cu に対する振動数分布を用いることにする。彼等の用いた相互作用ポテンシャルは軸対称であるとしているが、純銅の単結晶においては、この仮定は許されるであろう。彼等の得た振動数分布は図 4 で示されている。

縦波と横波の伝播速度もちがいが、電子との相互作用もちがうので減衰の状態もちがっている。銅中での横波の伝播速度  $v_L$  は  $5.01 \times 10^5$  cm/sec であり、縦波の伝播速度  $v_T$  は  $2.27 \times 10^5$  cm/sec である。これにより熱伝導度に対する効果も縦波と横波とでは違っている。勿論、縦波と横波に対する振動数分布も同一ではない。ここで我々も縦波と横波に対する効果は Pippard<sup>(5)</sup> が導いた理論を援用することにして扱う。Pippard は、金属中における超音波減衰を、 $q\lambda_e$  の関数として縦波と横波とで別々に導いている。ここで  $\lambda_e$  は電子の平均自由行路、 $q$  はフォノンの波数である。

歪みのない金属の単位体積について  $N$  個の電子があるとし、それらの電子は Fermi 速度  $v_F$  までのすべての速度状態を占めているとしている。実際にフォノンと相互作用するのは Fermi エネルギーの近くの電子であり、その速度は Fermi 速度のものである。それ以下のエネルギー、速度をもった電子は殆んど相互作用にはあづからない。

フォノンの速さを  $u$  とする。フォノンの縦波によって格子は歪みをうけ、それによって電子の密度に周期的変化が生ずる。その結果、フォノンの進行方向に周期的電場ができて、その電場の為に伝導電子とフォノンとは相互作用をする。電子の平均自由行路がフォノンの波長に比べて短くなるにつれて、フォノンを散乱させる電子は増えるが、その電子は格子が振動するにつれて、格子により電子を運ぶ手助けをする。電子の平均自由行路  $\lambda_e$  が大きいとき空間電荷で散乱される電子の効果が導かれ、フォノンの平均自由行路は純粋な金属における値に近づく。

縦モードに対する平均自由行路の式は

$$\lambda_L = \frac{D v_L \tau}{N m_e} \frac{F_L(y)}{y} \quad (1)$$

と書くことができる<sup>(4)</sup>。ここで  $N$  は単位体積中の伝導電子の数で、 $m$  は電子の質量、 $D$  は金属の密度、 $v_L$  は縦の音速である。変数  $y$  は

$$y = q \lambda_e. \quad (2)$$

電子の緩和時間  $\tau$  は、Fermi 速度を  $v_F$  として

$$\tau = \frac{\lambda_e}{v_F} \quad (3)$$

関数  $F_L(y)$  は

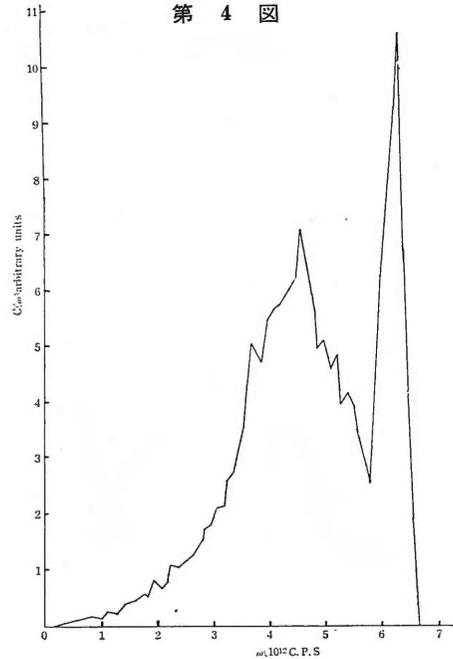
$$\frac{y}{F_L(y)} = \frac{y^2}{3} \frac{\tan^{-1} y}{y - \tan^{-1} y} - 1 \quad (4)$$

である。

前節の (6) において、 $A$  の代りに  $\lambda_L$  を入れ、 $u$  の代りに  $v_L$  を入れると、単一種類であるから  $\mathcal{E}$  は不要となり、 $g(\omega, T)$  はフォノンの分布則を入れると、縦波による格子熱伝導度  $K_L$  の式は

$$\begin{aligned} K_L &= \frac{N_0}{3} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty v_L \lambda_L \hbar \omega \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_0 T} - 1}} \right) \cdot C_L(\omega) d\omega \\ &= \frac{N_0 D k_0^2 T}{3 N m_e v_F \hbar} \int_0^\infty \frac{\lambda_e v_L^2}{y} F_L(y) \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} C_L(x) dx \end{aligned} \quad (5)$$

第 4 図



こゝで  $y = \frac{k_0}{\hbar} \frac{TA_e}{v_L} x$  で  $x$  と関係づけられている。または (8) を利用すれば

$$K_L = \frac{N_0 D k_0^3 T^2}{6\pi^2 N m_e v_F \hbar^2} \int_0^\infty F_L(y) \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} w_L(x) dx \quad (6)$$

この両式における  $C(x)$  と  $w(x)$  との間には

$$C(x) = x^2 w(x) \quad (7)$$

の関係が成り立っている。

次に、横波は進行方向に対しては密度の変化の原因にならない。たゞ左右に全体として平行移動するだけだから、空間荷電が生ずる原因にならない。この場合の電子とフォノンとの間の相互作用は、イオンと電子との相対運動によって作られる電流を通して行われる。縦波の時と同様に  $qA_e$  が小さい値の時に対する式を導いている。横モードの減衰係数に対する Pippard の式は

$$A_T = \frac{D v_T \tau}{N m_e} \frac{g}{1-g} \quad (8)$$

$$g = \frac{3}{2y^2} \left\{ \left( \frac{y^2 + 1}{y} \right) \tan^{-1} y - 1 \right\} \quad (9)$$

と書くことができる。

前節の (6) または (8) に上式を入れると横波による格子熱伝導度  $K_T$  の式は

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{N_0}{3} \int_0^\infty v_T \frac{D v_T \tau}{N m_e} \frac{g}{1-g} \hbar \omega \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{e \frac{\hbar \omega}{k_0 T} - 1} \right) \cdot C_T(\omega) d\omega \\ &= \frac{N_0 D k_0^2 T}{3N m_e v_F \hbar} \int_0^\infty A_e v_T^2 \frac{g}{1-g} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} C_T(x) dx \end{aligned} \quad (10)$$

または

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{N_0 D k_0^3 T^2}{6\pi^2 N m_e v_F \hbar^2} \int_0^\infty \frac{k_0}{\hbar} \frac{TA_e}{v_T} \cdot A_e v_T^2 \frac{g}{1-g} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} w_T(x) dx \\ &= \frac{N_0 D k_0^4 T^3}{6\pi^2 N m_e v_F \hbar^3} \int_0^\infty A_e^2 v_T \frac{g}{1-g} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} w_T(x) dx \end{aligned} \quad (11)$$

(5) と (10) とが我々の縦波と横波に対する格子熱伝導度の式であり、Debye 近似の時は、(6) と (11) の式で  $w(x) =$  一定とおけばよい。

なお、電子の緩和時間  $\tau$  は  $\tau \simeq 2 \times 10^{-14}$  sec, 電子の銅中での平均自由行路  $A_e$  は  $A_e = 4.5 \times 10^{-6}$  cm, Fermi 速度  $v_F$  は  $v_F = 1.58 \times 10^8$  cm/sec (銅中で) であることが Kittel<sup>(38)</sup> の教科書に与えられている。

こゝで扱ったのは単結晶に対するものではない。というのは、結晶方向によって振動数分布が異なることを無視して異方性が陽の形に入っていないからである。

単結晶の方位を  $j$  で区別すれば、格子の熱伝導度の結晶異方性が得られる。結晶の方位としては、 $j=1$  に対しては  $C_1$  と書いたとき [100] 方向での振動数分布を表わし、 $j=2$  に対しては  $C_2$  は [110] 方向、 $j=3$  に対しては  $C_3$  は [111] 方向の3種類を採用することにする。そのおのおのに対しての格子熱伝導度は、縦と横モードに対して

$$K_L^j = \frac{N_0 D k_0^2 T}{3N m_e v_F \hbar} \int_0^\infty \frac{A_e v_L^2}{y} F_L(y) \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} C_j(x) dx \quad (12)$$

$$K_T^j = \frac{N_0 D k_0^2 T}{3N m_e v_F \hbar} \int_0^\infty A_e v_T^2 \frac{g}{1-g} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} C_j(x) dx \quad (13)$$

と与えられる。振動数分布  $C_j(x)$  以外にも結晶方位異方性があるはずであるが、それらはすべて無視している。我々は最終的には (12), (13) によって格子熱伝導度の結晶異方性を銅の単結晶について求めようと思っているが、まず手始めに、Debye 近似の有用性について調べる目的で、前節の (6) で緩和時間  $\tau \simeq 10^{-11}$  sec, 平均自由行路  $A \simeq 5.6 \times 10^{-6}$  cm, 音速は横波のとき  $u = 5.01 \times 10^5$  cm/sec, 縦波のとき  $u = 2.27 \times 10^5$  cm/sec を採用し、 $C(\omega)$  については Debye 近似のときと、Varshni 等によるものに対して別々に計算してみた。

#### § 4. 単結晶における結晶方向による異方性

単結晶棒の熱伝導度を測定する時には、その単結晶棒の結晶方位によって熱伝導度は異なるはずである。それはフォノンの振動数分布が結晶方位によって異なるからである。一般的に振動数分布は3次元の場合には求められないが、特別の方向についてはそれが容易に求められる。そういうことを利用して、1948年に Houston<sup>(39)</sup>は立方結晶の振動数分布関数を近似的に決める方法を提出した。その方向としては  $[100]$ ,  $[110]$ ,  $[111]$  の3方向であるし、我々の単結晶も、この3方向を持つものであり、理論と実験との比較をするにも好都合である。

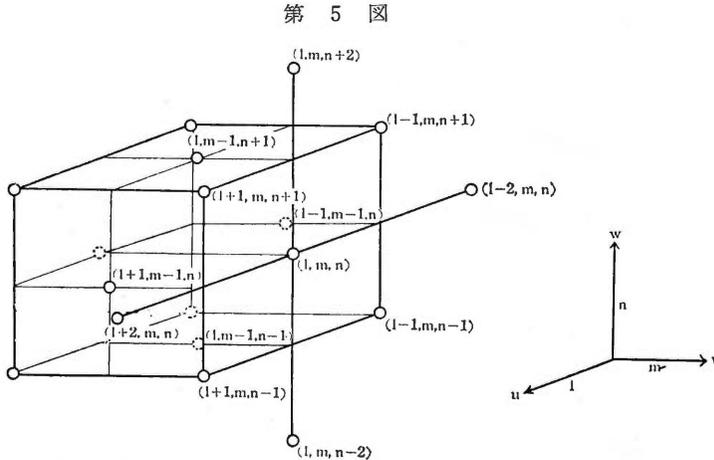
$[100]$  方向の振動数分布を  $C_1$ ,  $[110]$  方向の振動数分布を  $C_2$ ,  $[111]$  方向の振動数分布を  $C_3$  とおくと、全体の振動数分布は

$$C(\omega) = \frac{4\pi}{35} [10 C_1 + 16 C_2 + 9 C_3]$$

で与えられる。<sup>(40)(41)</sup>

面心立方格子や体心立方格子の  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  については、以前<sup>(42)</sup>に計算したものがあるが、それをこゝで一度述べることにしよう。

まず面心立方格子について、原子  $(l, m, n)$  に及ぼす最近接原子12個と、次に近い原子6個よりの影響のみを



考える。最近接原子間の相互作用定数を  $\alpha$ , 次に近い原子間の相互作用定数を  $\gamma$  とおくと、この系の運動エネルギー  $T$  と、ポテンシャル・エネルギー  $U$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \sum_{l, m, n} (\dot{u}_{lmn}^2 + \dot{v}_{lmn}^2 + \dot{w}_{lmn}^2) \\ U &= \frac{1}{2} \alpha \sum_{l, m, n} (u_{lmn} - v_{lmn} - u_{l+1, m-1, n} + v_{l+1, m-1, n})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha \sum_{l, m, n} (u_{lmn} + v_{lmn} - u_{l-1, m-1, n} - v_{l-1, m-1, n})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha \sum_{l, m, n} (u_{lmn} + w_{lmn} - u_{l+1, m, n+1} - w_{l+1, m, n+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha \sum_{l, m, n} (u_{lmn} - w_{lmn} - u_{l-1, m, n+1} + w_{l-1, m, n+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha \sum_{l, m, n} (v_{lmn} - w_{lmn} - v_{l, m-1, n+1} + w_{l, m-1, n+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha \sum_{l, m, n} (v_{lmn} + w_{lmn} - v_{l, m-1, n-1} - w_{l, m-1, n-1})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} r \sum (u_{lmn} - u_{l+2, m, n})^2 \\
& + \frac{1}{2} r \sum (v_{lmn} - v_{l, m+2, n})^2 \\
& + \frac{1}{2} r \sum (w_{lmn} - w_{l, m, n+2})^2
\end{aligned}$$

$u, v, w$  は各々の原子が, 自分の格子点からの移動の距離の 3 成分を表わしている。

これから Lagrangian  $L$

$$L = T - U$$

を用いて,  $(l, m, n)$  原子に対する運動方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{lmn}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_{lmn}} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_{lmn}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_{lmn}} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_{lmn}} \right) - \frac{\partial L}{\partial w_{lmn}} &= 0
\end{aligned}$$

より得られる。この解として

$$\begin{pmatrix} u_{lmn} \\ v_{lmn} \\ w_{lmn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} e^{2\pi i(\sigma_1 l a_1 + \sigma_2 m a_2 + \sigma_3 n a_3 + \sigma \rho_{lmn} - \nu t)}$$

とおく。 $\rho_{lmn}$  は考えている原子の属する細胞の原点からの位置ベクトル,  $a_i$  は  $u, v, w$  の 3 つの方向の単位ベクトル,  $\sigma$  は波数ベクトル,  $\sigma_i$  はその成分である。

ここで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\pi \begin{pmatrix} \sigma_1 a_1 \\ \sigma_2 a_2 \\ \sigma_3 a_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \frac{2\pi^2 m \nu^2}{\alpha}$$

とおくと, 運動方程式は次のように書ける。

$$\begin{cases}
\left\{ 2 + 2 \frac{r}{\alpha} \sin^2 x - \cos x (\cos y + \cos z) - \lambda^2 \right\} \xi + \sin x \sin y \cdot \eta + \sin x \sin z \cdot \zeta = 0 \\
\sin x \sin y \cdot \xi + \left\{ 2 + 2 \frac{r}{\alpha} \sin^2 y - \cos y (\cos z + \cos x) - \lambda^2 \right\} \eta + \sin y \sin z \cdot \zeta = 0 \\
\sin x \sin z \cdot \xi + \sin y \sin z \cdot \eta + \left\{ 2 + 2 \frac{r}{\alpha} \sin^2 z - \cos z (\cos x + \cos y) - \lambda^2 \right\} \zeta = 0
\end{cases}$$

ここで  $\xi, \eta, \zeta$  が恒等的に 0 にならないためには,  $\xi, \eta, \zeta$  の係数から出来る行列式が 0 であればよい。

$$\begin{vmatrix}
2 + 2 \frac{r}{\alpha} \sin^2 x - \cos x (\cos y + \cos z) - \lambda^2 & \sin x \sin y & \sin x \sin z \\
\sin x \sin y & 2 + 2 \frac{r}{\alpha} \sin^2 y - \cos y (\cos z + \cos x) - \lambda^2 & \sin y \sin z \\
\sin x \sin z & \sin y \sin z & 2 + 2 \frac{r}{\alpha} \sin^2 z - \cos z (\cos x + \cos y) - \lambda^2
\end{vmatrix} = 0$$

簡単の為に  $\frac{r}{\alpha} = 0$  の場合を計算すると

(i)  $x = y = 0, z = r$  の場合には, 即ち  $[100]$  方向を考えると, 上の行列式から

$$\lambda^2 = 1 - \cos r \quad (2 \text{ 重根})$$

$$\lambda^2 = 2(1 - \cos r) \quad (1 \text{ 重根})$$

をうる。これから

$$\sin r = \sqrt{1 - \cos^2 r}$$

より  $\sin r$  を求め、また

$$\sin^2 \frac{r}{2} = \frac{1 - \cos r}{2}$$

より  $r$  を求めて  $r^2 \frac{dr}{d\lambda}$  を求めると

2重根に対しては

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \frac{8 \left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^2}{\sqrt{2 - \lambda^2}}$$

1重根に対しては

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \frac{8 \left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{2} \right)^2}{\sqrt{4 - \lambda^2}}$$

従って、横モードに対応する振動数分布は

$$r^2 \frac{dr}{d\omega} = 16 \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \frac{\left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^2}{\sqrt{2 - \lambda^2}} = C_{1, r}$$

縦モードに対応する振動数分布は

$$r^2 \frac{dr}{d\omega} = 8 \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \frac{\left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{2} \right)^2}{\sqrt{4 - \lambda^2}} = C_{1, L}$$

で与えられる。

(註) 極座標で  $r$  と  $r + dr$ ,  $\theta$  と  $\theta + d\theta$ ,  $\varphi$  と  $\varphi + d\varphi$  との間の小体積  $r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$  の中にあるモードの数は、その体積に比例するだろうから、比例定数を  $A$  とおいて

$$A r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = A r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \frac{dr}{d\omega} d\omega = A r^2 \sin\theta \frac{dr}{d\omega} d\omega d\theta d\varphi$$

である。又一方  $\theta$  と  $\theta + d\theta$ ,  $\varphi$  と  $\varphi + d\varphi$ ,  $\omega$  と  $\omega + d\omega$  との間にあるモードの数は

$$F(\omega, \theta, \varphi) \sin\theta d\omega d\theta d\varphi$$

であるから、両者を比べて、振動数分布は

$$\begin{aligned} F(\omega, \theta, \varphi) &= A r^2 \frac{dr}{d\omega} \\ &= A r^2 \frac{dr}{dq} \frac{dq}{d\omega} \end{aligned}$$

で求められる。こゝで定数  $A$  は条件

$$\iiint F(\omega, \theta, \varphi) \sin\theta d\omega d\theta d\varphi = 3N$$

より定められる。(以上)

(ii)  $x = 0, y = z = \frac{r}{\sqrt{2}}$  の場合、即ち  $[110]$  方向に対しては、

$$\lambda^2 = 2 \left( 1 - \cos \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\lambda^2 = 1 - \cos \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda^2 = 2 - \cos \frac{r}{\sqrt{2}} - \cos \sqrt{2} r$$

それぞれに対して

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \frac{16 \sqrt{2} \left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{2} \right)^2}{\sqrt{4 - \lambda^2}}$$

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \frac{16 \sqrt{2} \left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^2}{\sqrt{2 - \lambda^2}}$$

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \frac{64\sqrt{2}\lambda \left\{ \sin^{-1} \left( \frac{5}{8} - \frac{1}{8}P \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2}{P\sqrt{-10+8\lambda^2+2P}}$$

$$P = \sqrt{25-8\lambda^2}$$

今度は縦モードと横モードとが判然と区別されず、お互いに混入した状態になっているが、最初のものが、縦モードに対応し、その他のものが横モードに対応していると考えられる。従って

$$C_{2,T} = 16\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \frac{\left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^2}{\sqrt{2-\lambda^2}}$$

$$C_{2,T'} = 64\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \frac{\lambda \left\{ \sin^{-1} \left( \frac{5}{8} - \frac{1}{8}P \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2}{P\sqrt{-10+8\lambda^2+2P}}$$

$$P = \sqrt{25-8\lambda^2}$$

$$C_{2,L} = 16\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \frac{\left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{2} \right)^2}{\sqrt{4-\lambda^2}}$$

(iii)  $x = y = z = \frac{r}{\sqrt{3}}$  の場合、即ち  $[111]$  方向に対しては

$$\lambda = \sin \frac{r}{\sqrt{3}} \quad (2 \text{ 重根})$$

$$\lambda = 2 \sin \frac{r}{\sqrt{3}} \quad (1 \text{ 重根})$$

それぞれに対して

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \frac{3\sqrt{3} (\sin^{-1} \lambda)^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \frac{3\sqrt{3} \left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{2} \right)^2}{\sqrt{4-\lambda^2}}$$

従って、横モードに対応する振動数分布は

$$C_{3,T} = 6\sqrt{3} \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \frac{(\sin^{-1} \lambda)^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

縦モードに対応する振動数分布は

$$C_{3,L} = 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \frac{\left( \sin^{-1} \frac{\lambda}{2} \right)^2}{\sqrt{4-\lambda^2}}$$

調和振動子の固有角振動数を  $\omega_0$  とおくと、 $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$  だから、

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad \therefore \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{\omega_0}$$

である。 $C$  を  $\omega$  の関数として表わせれば、振動数分布は次の様になる。

$[100]$  方向に対して

$$C_{1,T} = \frac{8}{\omega_0} \frac{\left( \sin^{-1} \frac{\omega}{2\omega_0} \right)^2}{\sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{2\omega_0} \right)^2}}$$

$$C_{1,L} = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \frac{\left( \sin^{-1} \frac{\omega}{\sqrt{8}\omega_0} \right)^2}{\sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\sqrt{8}\omega_0} \right)^2}}$$

$[110]$  方向に対して

$$C_{2,T} = \frac{8\sqrt{2}}{\omega_0} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2}}$$

$$C_{2,T'} = \frac{32\sqrt{2}}{\omega_0^2} \frac{\omega \left\{ \sin^{-1} \left( \frac{5}{8} - \frac{1}{8} P \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2}{P \sqrt{-10 + \frac{4\omega^2}{\omega_0^2} + 2P}}$$

$$P = \sqrt{25 - \frac{4\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$C_{2,L} = \frac{8}{\omega_0} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{\omega}{\sqrt{8}\omega_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\sqrt{8}\omega_0}\right)^2}}$$

[111] 方向に対して

$$C_{3,T} = \frac{3\sqrt{6}}{\omega_0} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{\omega}{\sqrt{2}\omega_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\sqrt{2}\omega_0}\right)^2}}$$

$$C_{3,L} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\omega_0} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{\omega}{\sqrt{8}\omega_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\sqrt{8}\omega_0}\right)^2}}$$

これらの  $C$  を前々節の (6) に入れると、3つの方向に対する縦モード ( $L$ ) と横モード ( $T$ ) とによる格子熱伝導度が得られる。さらに前節の (12) の  $C_j$  のところには、上式の  $C_{1,L}$ ,  $C_{2,L}$ ,  $C_{3,L}$  を入れ、(13) の  $C_j$  のところには  $C_{1,T}$ ,  $C_{2,T}$ ,  $C_{2,T'}$ ,  $C_{3,T}$  を入れれば、金属の単結晶棒についての格子熱伝導度の結晶方位による異方性が縦モードと横モードとによって与えられる。

$\omega$  が小さいときには、これらの  $C_j$  はすべて  $\omega^2$  で近似できる。即ち

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\therefore (\sin^{-1} x)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{8x^6}{45} + \dots$$

従って  $|x| < 1$  なら

$$(\sin^{-1} x)^2 \doteq x^2$$

となり、分子は  $\omega^2$  に比例し、分母は  $1$  で近似できるから、全体として  $\omega^2$  に比例する。故に  $\omega$  が小さいときは Debye 近似になっていることがわかる。

さて、ここで

$$\frac{\hbar \omega}{k_0 T} = x, \quad \frac{\hbar \omega_0}{k_0 T} = x_0$$

とおくと、各々に対する格子熱伝導度は以下のように与えられる。

(i) [100] 方向

縦モードに対して

$$K_{1,L} = \frac{2\sqrt{2} N_0 D k_0}{3N m_e v_F x_0} \int_0^\infty \frac{A_e v_L^2}{y} F_L(y) \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{8} x_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{8} x_0}\right)^2}} dx$$

横モードに対して

$$K_{1,T} = \frac{8N_0 D k_0}{3N m_e v_F x_0} \int_0^\infty A_e v_T^2 \frac{g}{1-g} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{x}{2x_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2x_0}\right)^2}} dx$$

(ii) [110] 方向

縦モードに対して

$$K_{2,L} = \frac{8N_0 D k_0}{3N m_e v_F x_0} \int_0^\infty \frac{A_e v_L^2}{y} F_L(y) \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{8} x_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{8} x_0}\right)^2}} dx$$

横モードに対して

$$K_{2,T} = \frac{8\sqrt{2} N_0 D k_0}{3N m_e v_F x_0} \int_0^\infty A_e v_T^2 \frac{g}{1-g} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{x}{2x_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2x_0}\right)^2}} dx$$

$$K_{2,T'} = \frac{32\sqrt{2} N_0 D k_0}{3N m_e v_F x_0^2} \int_0^\infty A_e v_T^2 \frac{g}{1-g} \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{\left\{\sin^{-1} \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8} P\right)\right\}^2}{P \sqrt{-10 + \frac{4x^2}{x_0^2} + 2P}} dx$$

$$P = \sqrt{25 - \frac{4x^2}{x_0^2}}$$

(iii) [111] 方向

縦モードに対して

$$K_{3,L} = \frac{\sqrt{3} N_0 D k_0}{2\sqrt{2} N m_e v_F x_0} \int_0^\infty \frac{A_e v_L^2}{y} F_L(y) \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{8} x_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{8} x_0}\right)^2}} dx$$

横モードに対して

$$K_{3,T} = \frac{\sqrt{6} N_0 D k_0}{N m_e v_F x_0} \int_0^\infty A_e v_T^2 \frac{g}{1-g} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2} x_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2} x_0}\right)^2}} dx$$

文字の説明

 $N_0$  : 単位体積あたりのフォノンの数 $N$  : 単位体積あたりの電子の数 $D$  : 金属の密度 $k_0$  : Boltzmann 定数 $m_e$  : 電子の質量 $v_F$  : 電子の Fermi 速度 $A_e$  : 電子の金属中での平均自由行路 $v_L$  : フォノンの縦波の伝播速度 $v_T$  : フォノンの横波の伝播速度

$$x_0 = \frac{\hbar \omega_0}{k_0 T}, \quad x = \frac{\hbar \omega}{k_0 T}$$

 $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$  : 調和振動子の固有角振動数 $m$  : 金属原子の質量 $\alpha$  : 最近接原子間の力の定数 (ばね定数)

$$y = q A_e = \frac{k_0}{\hbar} \frac{T A_e}{v_L} x$$

 $q$  : フォノンの波数 ( $\omega/v$ )

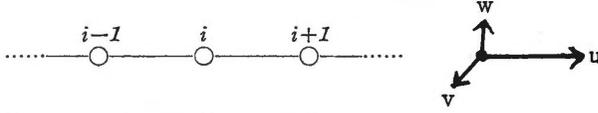
$$\frac{y}{F_L(y)} = \frac{y^2}{3} \frac{\tan^{-1} y}{y - \tan^{-1} y} - 1$$

$$g = \frac{3}{2y^2} \left\{ \frac{y^2 + 1}{y} \tan^{-1} y - 1 \right\}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (h: \text{Planck の定数})$$

### §5. 一次元格子モデルの縦と横モード

同一質量  $m$  の原子が等間隔  $d$  で配列された一次元鎖の方向を  $x$  軸にとり、その軸に垂直に  $y$  軸 と  $z$  軸をとる。



$x$  方向の変移を  $u$ ,  $y$  方向の変移を  $v$ ,  $z$  方向を  $w$  とする。

この系の運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m \sum_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2)$$

ポテンシャル・エネルギー

$$U = \frac{1}{2} \alpha \sum_i \{ (u_{i+1} - u_i)^2 + (v_{i+1} + w_{i+1} - v_i - w_i)^2 \}$$

相互作用は最近接原子間のみを考えている。

Lagrange エネルギー

$$L = T - U$$

より、Lagrange の運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial u_i},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial v_i},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial w_i}.$$

より求まり

$$m \ddot{u}_i = \alpha \{ (u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1}) \}$$

$$m \ddot{v}_i = \alpha \{ (v_{i+1} + w_{i+1} - v_i - w_i) - (v_i + w_i - v_{i-1} - w_{i-1}) \}$$

$$m \ddot{w}_i = \alpha \{ (v_{i+1} + w_{i+1} - v_i - w_i) - (v_i + w_i - v_{i-1} - w_{i-1}) \}$$

波は場所と時間の関数であるが、 $x$  方向にのみ伝わるから  $e^{i(\omega t - kx)}$  の形である。

従って、いま

$$\begin{aligned} u_i &= u_0(x) e^{i(\omega t - kx_i)} && \text{縦モード} \\ v_i &= v_0(x) e^{i(\omega t - kx_i)} \\ w_i &= w_0(x) e^{i(\omega t - kx_i)} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{横モード} \end{aligned}$$

とおくと、 $u_i$  は波の進行方向に振動する波だから縦モードを表わし、 $v_i$  と  $w_i$  とは波の進行方向と垂直に振動するから横モードである。

ここに

$$x_i = id$$

であり、

$$u_i = u_{i+N},$$

$$v_i = v_{i+N},$$

$$w_i = w_{i+N},$$

とすると

$$e^{ik x_i} = e^{ik x_{i+N}}$$

$$\therefore e^{ik x_i} (1 - e^{ik x_N}) = 0$$

$e^{ik x_i} \neq 0$  とすると

$$e^{ik x_N} = 1$$

$$\therefore kx_N = 2n\pi$$

$$\therefore k = \frac{2n\pi}{Nd} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N}{2})$$

さて,  $u_i, v_i, w_i$  を運動方程式に入れると,  $u_i$  に対しては

$$\begin{aligned} -m\omega^2 &= \alpha \{ (e^{-ikd} - 1) - (1 - e^{ikd}) \} \\ &= \alpha \left( e^{i\frac{kd}{2}} - e^{-i\frac{kd}{2}} \right)^2 \\ &= \alpha \left( 2i \sin \frac{kd}{2} \right)^2 \\ &= -4\alpha \sin^2 \frac{kd}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \omega^2 &= 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}} \sin \frac{kd}{2} \\ &= 2\omega_0 \sin \frac{kd}{2} \quad \left( \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \right) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} d\omega &= 2\omega_0 \cdot \frac{d}{2} \cos \frac{kd}{2} dk \\ &= \omega_0 d \cos \frac{kd}{2} dk \\ \therefore dk &= f(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_0 d} \frac{1}{\cos \frac{kd}{2}} d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_0 d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2}} d\omega \end{aligned}$$

従って, 縦モードの振動数分布は

$$f_L(\omega) = \frac{1}{\omega_0 d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2}}$$

$v_i, w_i$  に対しては

$$\begin{aligned} -m\omega^2 v_0 &= -4\alpha \sin^2 \frac{kd}{2} \cdot (v_0 + w_0) \\ -m\omega^2 w_0 &= -4\alpha \sin^2 \frac{kd}{2} \cdot (v_0 + w_0) \end{aligned}$$

両式を加えると

$$\left( \omega^2 - 8\alpha \sin^2 \frac{kd}{2} \right) (v_0 + w_0) = 0$$

もし  $v_0 + w_0 \neq 0$  なら

$$\omega^2 = 8\alpha \sin^2 \frac{kd}{2}$$

両式の差をとると

$$\omega^2 (v_0 - w_0) = 0$$

もし  $v_0 \neq w_0$  なら

$$\omega^2 = 0$$

故に  $v_0 \neq w_0$  なら  $\omega^2 = 0$  となるから,  $v_0 = w_0$  でなければならない。すると当然  $v_0 + w_0 \neq 0$  だから

$$\omega^2 = 8\alpha \sin^2 \frac{kd}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \omega &= 2\sqrt{2} \omega_0 \sin \frac{kd}{2} \\
\therefore d\omega &= 2\sqrt{2} \omega_0 \cdot \frac{d}{2} \cos \frac{kd}{2} dk \\
&= \sqrt{2} \omega_0 d \cos \frac{kd}{2} dk \\
\therefore dk &= f(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} \omega_0 d} \cdot \frac{1}{\cos \frac{kd}{2}} d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} \omega_0 d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\sqrt{8} \omega_0}\right)^2}} d\omega
\end{aligned}$$

従って横モードの振動数分布は

$$f_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2} \omega_0 d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\sqrt{8} \omega_0}\right)^2}}$$

となる。縦モードと横モードの割合は縦1に対して横2の割合であるから  
縦モードの振動数分布は

$$C_L = \frac{1}{\omega_0 d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2}}$$

横モードの振動数分布は

$$C_T = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\sqrt{8} \omega_0}\right)^2}}$$

従って、一次元鎖の場合の格子熱伝導度は縦モードに対しては

$$K_L = \frac{Nk_0^2 T}{2\hbar} \int_0^\infty u_L(\omega) A_L \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \cdot \frac{1}{\omega_0 d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2x_0}\right)^2}} dx$$

横モードに対しては

$$K_T = \frac{Nk_0^2 T}{2\hbar} \int_0^\infty u_T(\omega) A_T \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{8} x_0}\right)^2}} dx$$

## §6. 格子振動数スペクトルの近似式の決定

前述の銅の格子振動数スペクトル(図4)をもとにした58個のデータで、九州大学大型計算機センターのFACOM230-60を使い、最小自乗法により近似式を求めた。5次式から23次式までで近似したが、ここではそのうちの代表的なものだけをあげておく。

図6は、 $1 (10^{12} \text{ c. p. s.})$  付近が負になり、2つのピークがならされておき、まだ図4には、ほど遠い。

図7は、前図にくらべて、2つのピークは少し出てきたがまだ顕著でなく、 $1 (10^{12} \text{ c. p. s.})$  付近に小さなピークが出来ている。

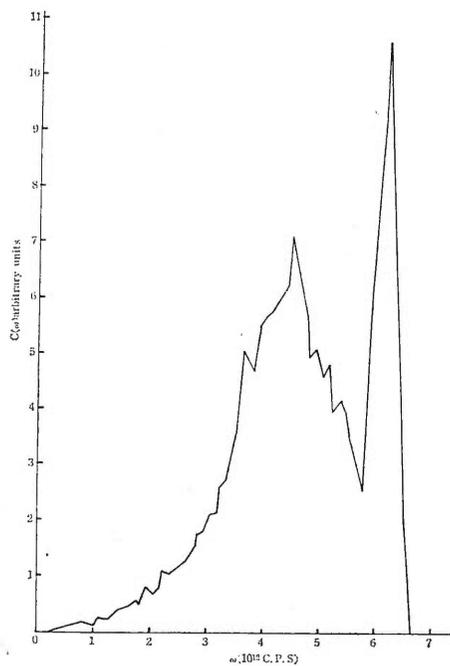
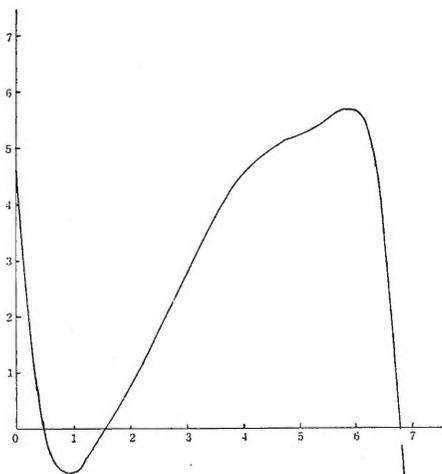
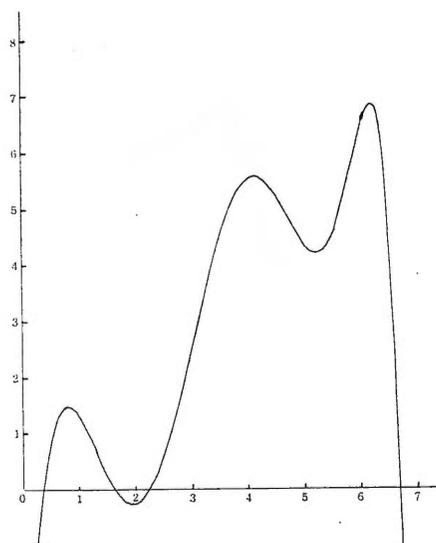
図8は、前の2つの図にくらべれば、やや図4に近づいたが  $2 (10^{12} \text{ c. p. s.})$  以下の曲線のふくらみが、まだ少し大きいようである。

図9は、 $\omega$  軸を切る点が  $0$  から少し離れているが、全部の図をとおして一番よいし、2つのピークも図4が一番近く、これ以後この図をもとにして計算を行なった。

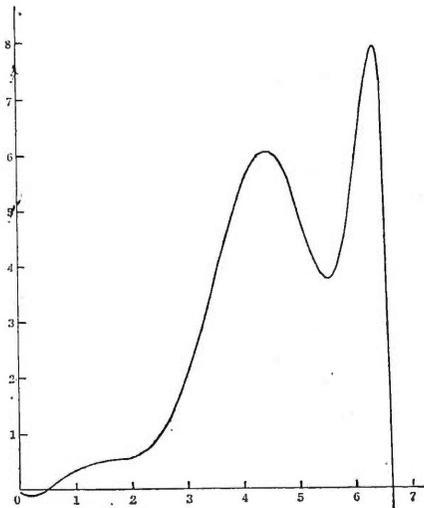
図10は、だいたい前図の場合と同じであるが  $2 (10^{12} \text{ c. p. s.})$  以下の曲線のふくらみが前図にくらべて少し大きくなり、 $\omega$  軸を切る点が前図にくらべ  $0$  から離れている。

図11は、 $2.5 (10^{12} \text{ c. p. s.})$  以下の曲線の部分と図4の場合とのくいちがいが再び大きくなってきた。

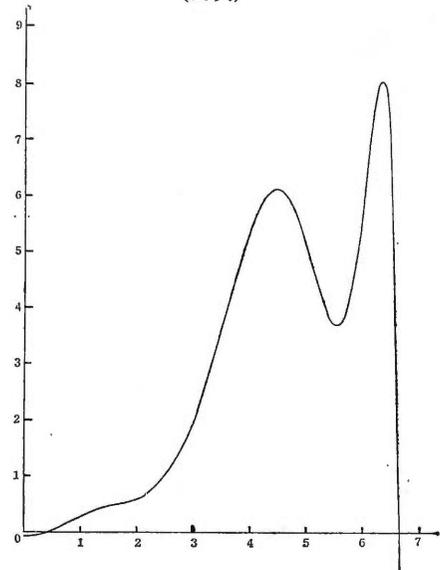
第 4 図

第 6 図  
(7次)第 7 図  
(10次)

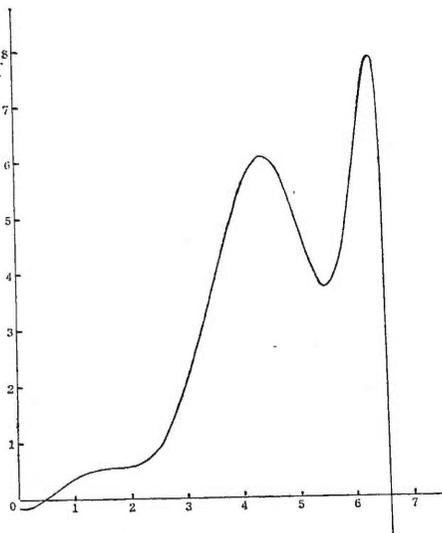
第 8 図  
(13次)



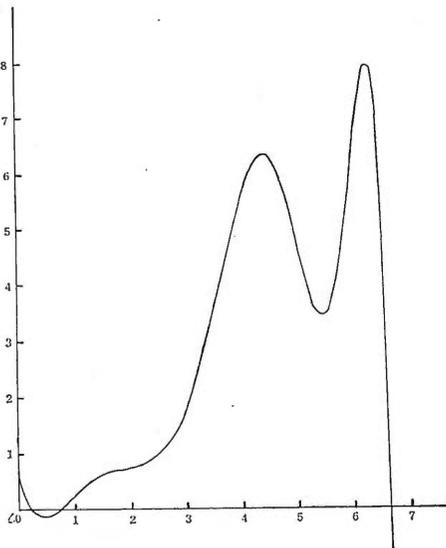
第 9 図  
(15次)



第 10 図  
(17次)



第 11 図  
(21次)



以上のことからある図形の近似式を求めようとする場合次数を高くしたからよい近似式が求まるというのではなく、ある次数（この場合15次式での近似）のところまで近似が一番よいということになるのではないだろうか。

数学的には、くわしいことはわからないが、たとえばデータの個数と次数との関係、あるいはピークの数、高さや次数との関係といったものがあるのかもしれない。

## §7. Debye 近似を用いたものとの比較

ここで、図9の15次での近似式を使って Debye 近似を用いたものと比較する。

$$\begin{aligned}
 KI &= \frac{N}{3} \int_0^{\infty} \tau u^2(\omega) \hbar \omega \frac{\partial \left( \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \right)}{\partial T} \cdot \frac{3}{2\pi^2 u(\omega)^3} C(\omega) d\omega \\
 &= \frac{N \cdot \tau \cdot \hbar^2}{2\pi^2 u k} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 e^{\frac{\hbar \omega}{kT}}}{T^2 \left( e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1 \right)^2} C(\omega) d\omega \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K2 &= \frac{N}{3} \int_0^{\infty} \tau u^2(\omega) \hbar \omega \frac{\partial \left( \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \right)}{\partial T} \cdot \frac{3}{2\pi^2 u(\omega)^3} \omega^2 d\omega \\
 &= \frac{N \cdot \tau \cdot \hbar^2}{2\pi^2 u k} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 e^{\frac{\hbar \omega}{kT}}}{T^2 \left( e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1 \right)^2} \omega^2 d\omega \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

すなわち、 $KI$ は、銅の振動数スペクトルの近似式から求めた15次の式を $C(\omega)$ としての計算で、 $K2$ は、Debyeの近似式すなわち $\omega^2$ で近似した計算である。

上の(1)、(2)を縦波と横波に分けて行なうと、

$$\begin{aligned}
 KI &= \frac{N\tau_L \hbar^2}{2\pi^2 u_L k} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega^2 e^{\frac{\hbar \omega}{kT}}}{T^2 \left( e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1 \right)^2} C(\omega) d\omega \\
 &\quad + \frac{N\tau_T \hbar^2}{2\pi^2 u_T k} \int_{\omega_2}^{\omega_3} \frac{\omega^2 e^{\frac{\hbar \omega}{kT}}}{T^2 \left( e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1 \right)^2} C(\omega) d\omega \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K2 &= \frac{N\tau_L \hbar^2}{2\pi^2 u_L k} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega^2 e^{\frac{\hbar \omega}{kT}}}{T^2 \left( e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1 \right)^2} \omega^2 d\omega \\
 &\quad + \frac{N\tau_T \hbar^2}{2\pi^2 u_T k} \int_{\omega_2}^{\omega_3} \frac{\omega^2 e^{\frac{\hbar \omega}{kT}}}{T^2 \left( e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1 \right)^2} \omega^2 d\omega \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\tau_L = \frac{3 \times 10^{-8}}{5.01 \times 10^5} \text{ (sec)}, \quad \tau_T = \frac{3 \times 10^{-8}}{2.27 \times 10^5} \text{ (sec)}$$

銅の格子定数を  $3 \times 10^{-8} \text{ cm}$  と仮定した。

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-27} \text{ erg sec}$$

$$k = 1.380 \times 10^{-16} \text{ erg deg}^{-1}$$

$$u_L = 5.01 \times 10^5 \text{ cm sec}^{-1}$$

$$u_T = 2.27 \times 10^5 \text{ cm sec}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 C(\omega) &= -0.0635 - 0.202 x + 1.16 x^2 - 0.751 x^3 + 0.137 x^4 + 0.00194 x^5 \\
 &\quad + 0.00594 x^6 - 0.00116 x^7 - 7.7 \times 10^{-5} x^8 - 3.02 \times 10^{-5} x^9 + 2.36 \times \\
 &\quad 10^{-6} x^{10} + 7.34 \times 10^{-7} x^{11} + 8.01 \times 10^{-8} x^{12} - 4.34 \times 10^{-9} x^{13} \\
 &\quad - 3.22 \times 10^{-13} x^{14} - 2.34 \times 10^{-10} x^{15}
 \end{aligned}$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  は図9に合わせて

$$\omega_1 = 0.50 \times 10^{12}, \quad \omega_2 = 5.50 \times 10^{12}, \quad \omega_3 = 6.60 \times 10^{12},$$

として計算した。

これらの値を(3)(4)式に代入すると、

$$\begin{aligned} KI &= 4.879 \times 10^{-59} \times N \times \int_{0.50 \times 10^{12}}^{5.50 \times 10^{12}} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \times 10^{-12} \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \times 10^{-12} \omega}{T}} - 1 \right)^2} C(\omega) d\omega \\ &+ 2.376 \times 10^{-58} \times N \times \int_{5.50 \times 10^{12}}^{6.60 \times 10^{12}} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \times 10^{-12} \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \times 10^{-12} \omega}{T}} - 1 \right)^2} C(\omega) d\omega \dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K2 &= 4.879 \times 10^{-59} \times N \times \int_{0.50 \times 10^{12}}^{5.50 \times 10^{12}} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \times 10^{-12} \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \times 10^{-12} \omega}{T}} - 1 \right)^2} \omega^2 d\omega \\ &+ 2.376 \times 10^{-58} \times N \times \int_{5.50 \times 10^{12}}^{6.60 \times 10^{12}} \frac{e^{\frac{7.638 \times 10^{-12} \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \times 10^{-12} \omega}{T}} - 1 \right)^2} \omega^2 d\omega \dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで実際の計算では、簡単な為、次のようにしたので出て来た結果は傾向だけがでており正確な値は出ていない。すなわち、

$$\begin{aligned} KI &= 4.879 \int_{0.50}^{5.50} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \omega}{T}} - 1 \right)^2} C(\omega) d\omega \\ &+ 2.376 \int_{5.50}^{6.60} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \omega}{T}} - 1 \right)^2} C(\omega) d\omega \dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$K1A = 4.879 \int_{0.50}^{5.50} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \omega}{T}} - 1 \right)^2} C(\omega) d\omega \dots\dots (8)$$

$$K1B = 2.376 \int_{5.50}^{6.60} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \omega}{T}} - 1 \right)^2} C(\omega) d\omega \dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} K2 &= 4.879 \int_{0.50}^{5.50} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \omega}{T}} - 1 \right)^2} \omega^2 d\omega \\ &+ 2.376 \int_{5.50}^{6.60} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \omega}{T}} - 1 \right)^2} \omega^2 d\omega \dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$K2A = 4.879 \int_{0.50}^{5.50} \frac{\omega^2 e^{\frac{7.638 \omega}{T}}}{T^2 \left( e^{\frac{7.638 \omega}{T}} - 1 \right)^2} \omega^2 d\omega \dots\dots (11)$$

$$K2B = 2.376 \int_{5.50}^{6.60} \frac{e^{-\frac{7.688\omega}{T}}}{T^2 \left( e^{-\frac{7.688\omega}{T}} - 1 \right)^2} \omega^2 d\omega \dots\dots\dots (12)$$

(7), (8), (9), (10), (11), (12), の結果が図12であり, これらの関係を示す。

図13は,  $K1$  を 4.59 倍して,  $K2$  とともにその関係を示す。これで  $40^\circ K$  以下では,  $K1, K2$ , の間にわずかではあるが差が認められる。 $40^\circ K$  以上では両方とも一致する。

図14は,  $K1A$  を 5.71 倍して,  $K2$  とともにその関係を示す。これで  $100^\circ K$  以下で差を認められ, これ以上では一致する。

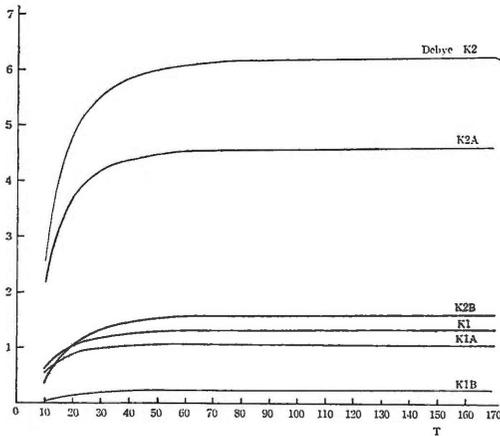
図15は  $K1B$  を 23.51 倍して,  $K2$  とともにその関係を示す。これも  $120^\circ K$  以下で差が認められ, これ以上では一致する。

図16は,  $K2A$  を 1.354 倍して,  $K2$  とともにその関係を示す。これも  $70^\circ K$  以下で差が認められ, これ以上では一致する。

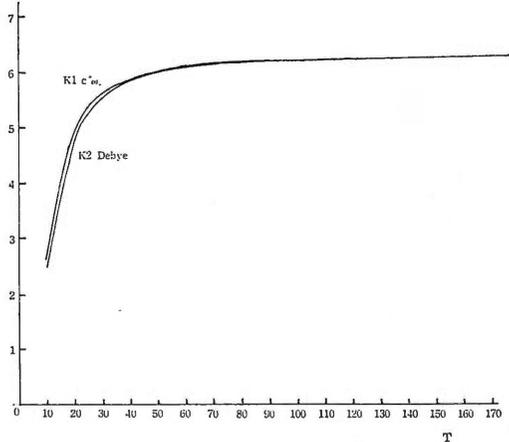
図17は,  $K2B$  を 3.83 倍して $K2$ とともにその関係を示す。

この結果より, Debye 近似は非常に良い近似であることがわかるが,  $50^\circ K$  以下では僅かながら差が認められるから, この附近の低温においては注意をする必要がある。なお, こゝでは緩和時間は温度にも, 振動数にもよらない定数として計算しているが, 実際は, それらの関数であるから, こゝでの結論は訂正しなければならない

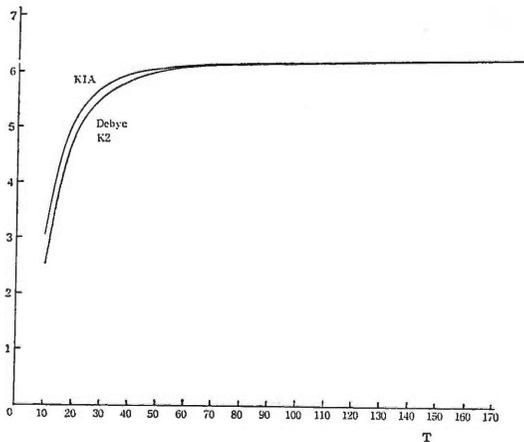
第 12 図



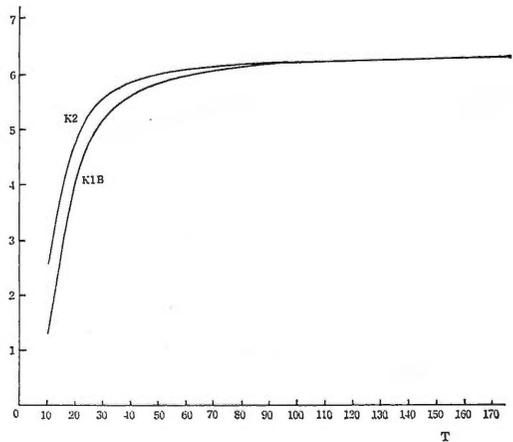
第 13 図



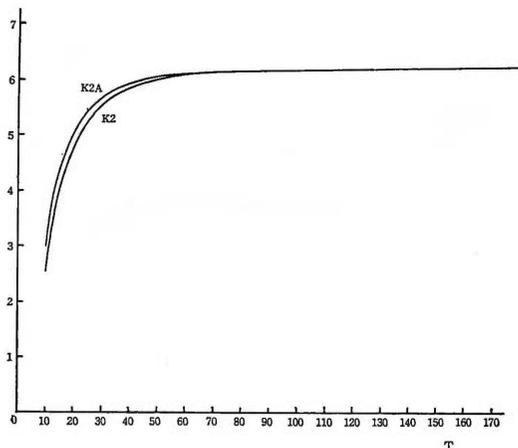
第 14 図



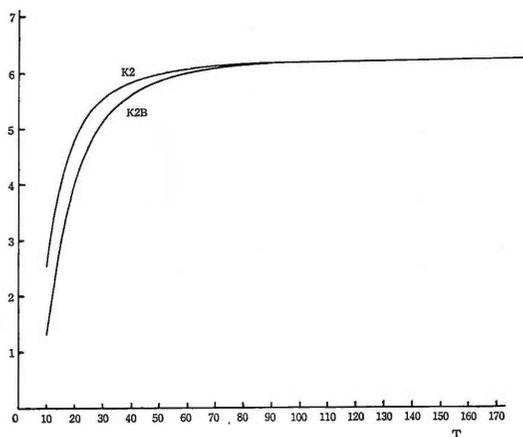
第 15 図



第 16 図



第 17 図



かも知れない。予定していた計算はもっと沢山あったけれども、時間の都合、連絡の不便さ、我々の不慣れなどもあり、予定していた計算の半分も行えなかった。

なお、この計算に際して、本校の木村教授には、電子計算機使用について、プログラミング等多大の援助と教示を仰いだ。また九大の計算機センターの方々には色々和我々の不備について御迷惑をかけ、ミス発見に記録的猛暑の中をいとわず努力をさいて頂いたことも併せ心からの感謝の意を表します。

我々は三次元結晶のうち面心立方格子についての結晶方向による熱伝導を求める式を得ている。次に、一次元格子という最も特別な場合にも縦モードと横モードとに対する熱伝導度を与える式を導いておいた。しかし、いずれにしる実験値との比較の段階にはなっていない。二次元格子については、まだ行なわなかったのは、§ 6 の計算に時間がかゝった為である。いずれ近い将来において、やり残した数値計算と共に平面格子に対する熱伝導度の式を導くつもりである。

### References

- 1) S. Chandrasekhar: Rev. Mod. Phys. **15**, 1 (1943)
- 2) J. Callaway: Phys. Rev. **113**, 1046 (1959)
- 3) P. G. Klemens: Solid State Physics, edited by F. Seitz and D. Turnbull. (Acad. Press, Inc., New York, 1958) Vol. 7.
- 4) P. Lindenfeld and W. B. Pennebaker: Phys. Rev. **127**, 1881 (1962)
- 5) A. B. Pippard: Phil. Mag. **46**, 1104 (1955)
- \* 戸田盛和: 日本物理学会誌, 第17巻第3号164頁 (1962) を参照.
- 6) V. Ambegaokar and J. Woo: Phys. Rev. **139**, 1818 (1965)
- 7) J. C. Swihart, D. J. Scalapins and Y. Wada: Phys. Rev. Letters **14**, 106 (1965)
- 8) M. A. Archibald, J. E. Dunick and M. H. Jericho: Phys. Rev. **153**, 786 (1967)
- 9) C. V. Baarle and R. P. Huebener: Phys. Rev. **172**, 699 (1968)
- 10) C. M. Bhandari and G. S. Verma: Phys. Rev. **138**, A288 (1965)
- 11) C. M. Bhandari and G. S. Verma: Phys. Rev. **140**, A2101 (1965)
- 12) T. Yazaki: J. Phys. Soc. Jap. **25**, 1054 (1968)
- 13) M. Ooyama: J. Phys. Soc. Jap. **23**, 552 (1967)
- 14) J. J. Martin and G. C. Danielson: Phys. Rev. **166**, 879 (1968)
- 15) W. Fulkerson, J. P. Moore, R. K. Williams, R. S. Graves and D. L. McElray: Phys. Rev. **167**, 765 (1968)
- 16) R. C. Heckman: J. Chem. Phys. **46**, 2158 (1967)
- 17) D. W. Boys and S. Legvold: Phys. Rev. **174**, 377 (1968)

- 18) J. M. Worlock: Phys. Rev. **147**, 636 (1966)
- 19) J. W. Schwartz and C. T. Walkers: Phys. Rev. **155**, 959 (1967), **155**, 969 (1967)
- 20) G. T. Fox, M. W. Wolfmeyer and J. R. Dillinger: Phys. Rev. **177**, 756 (1969)
- 21) M. Kusunoki and H. Suzuki: J. Phys. Soc. Japan: **26**, 932 (1969)
- 22) P. G. Klemens: Proc. Phys. Soc. **A68**, 1113 (1955)  
 P. Carruthers: Phys. Rev. **114**, 995 (1959)  
 H. Bross, A. Seeger and P. Gruner: Ann. Phys. (Germany) **11**, 230 (1963)  
 H. Bross, A. Seeger and R. Haberkorn: Phys. Status Solidi **3**, 1126 (1963)
- \*\*ドナーまたはアクセプター不純物を意識的に半導体に加えること。
- 23) J. E. Gueths, P. L. Garbarino, M. A. Mitchell, P. G. Klemens and C. A. Reynolds: Phys. Rev. **178**, 1009 (1969)
- 24) P. G. Klemens and L. Tewordt: Rev. Mod. Phys. **36**, 118 (1964)
- 25) G. E. Moore, Jr., and M. V. Klein: Phys. Rev. **179**, 722 (1969)
- 26) F. C. Baumann, J. P. Harrison, R. O. Pohl and W. D. Seward: Phys. Rev. **159**, 691 (1967)
- 27) G. T. Fox, M. W. Wolfmeyer, J. R. Dillinger and D. L. Huber: Phys. Rev. **165**, 898 (1968)
- 28) J. Ranninger: Phys. Rev. **140**, A2031 (1965)
- 29) D. N. Payton, M. Rich and W. M. Visscher: Phys. Rev. **160**, 706 (1967)
- 30) P. Gruner and H. Bross: Phys. Rev. **172**, 583 (1968)
- 31) Y. P. Varshni and R. C. Shukla: J. Chem. Phys. **43**, 3966 (1966)
- 32) W. A. Bowers and H. B. Rosenstock: J. Chem. Phys. **18**, 1056 (1950)
- 33) C. Kittel: Introduction to Solid State Physics (2nd edition)  
 宇野, 山下, 森田, 津屋共訳: 固体物理学入門 (丸善)
- 34) W. V. Houston: Revs. Modern Phys. **20**, 161 (1948)  
 M. Blackmann: Proc. Roy. Soc. (London) **A164**, 62 (1938)  
 E. W. Montroll: J. Chem. Phys. **10**, 218 (1942), **11**, 481 (1943)  
 L. van Hove: Phys. Rev. **89**, 1189 (1953)  
 原島鮮著: 固体の凝集機構 (朝倉書店)  
 原島鮮著: 物性物理の基礎Ⅱ, 結晶格子の力学 (共立社)
- 35) 33) を参照 (日本語訳 P. 115)
- 36) A. J. Dekker: Solid State Physics.  
 橋口, 神山共訳: 固体物理—理工学者のための—第11章 (コロナ社)
- 37) Y. P. Varshni and R. C. Shukla: J. Chem. Phys. **43**, 3966 (1966)  
 Cu の外に Al についても求められている。
- 38) 33) の P. 207, P. 208 (日本語訳) を参照。
- 39) W. V. Houston: Revs. Modern Phys. **20**, 161 (1948)
- 40) D. D. Betts, A. B. Bhatia and M. Wyman: Phys. Rev. **104**, 37 (1956)
- 41) 原島鮮著: 固体の凝集機構 (朝倉書店) によると  

$$C(\omega) = \frac{4\pi}{469} \{162 C_1 + 208 C_2 + 99 C_3\}$$
 となっている。
- 42) 永田 (1951) (未出版ノートより引用)

## 有明工業高等専門学校紀要

## 執筆者別総目録(1~5号)

&lt;発行日&gt;

第1号	昭41. 3. 20
2	昭42. 3. 20
3	昭42. 12. 30
4	昭43. 12. 28
5	昭44. 12. 26

## その1 (その2 p. 58)

<執筆者>	<題 目>	<巻号>	<ページ>
荒尾章 <small>三共・寺本</small>	本校生の生活・保健・クラブ活動・一般的思考について	3	15 ~ 38
	<small>共・寺本</small> 本校生の性格検査に基づく考察	4	1 ~ 19
荒木三知夫	減衰利得系最適軌道からの一回回復方策	3	71 ~ 77
井芹龍成	“The Grapes of Wrath” の国際的反響について	1	89 ~ 100
	<i>The pearl</i> の示す正しい意味	2	29 ~ 42
石崎勝 <small>典共・永田</small>	格子熱伝導度の理論計算	5	23 ~ 49
井上盟朗	線型ノルム空間における原点と超平面の距離公式の一つの証明	5	11 ~ 12
	再帰理論の機械故障問題への一応用	5	13 ~ 18
大山司朗 <small>朗共・木村</small>	根軌跡の数値解法(その2)	5	19 ~ 22
小沢賢治	マイクロ波におけるフェライトの特性	5	77 ~ 79
小田明	軟鋼丸棒の回転曲げ疲れき裂の伝ばについて	5	59 ~ 70
甲木季資 <small>ほか</small>	共同研究: 高専図書館はいかにあるべきか	1	2 ~ 54
勝田正男	写真現象剤の赤外線分光分析による定性及び定量分析について	5	91 ~ 100
木村剛三	換え歯車のための電子計算機のプログラムについて	2	21 ~ 24
	井桁構造の強度計算	3	55 ~ 66
	根軌跡の数値解法(その1)	4	21 ~ 22
	<small>共・大山</small> 根軌跡の数値解法(その2)	5	19 ~ 22
清森宏之助	送風機吸込側流れの実験的研究(その1)(その2)	4	37 ~ 54
	送風機吸込側流れの実験的研究(その3)	5	51 ~ 57
境忠一	宮沢賢治と『アザリア』	3	89 ~ 108
酒見次郎	高感度核四極共鳴吸収測定器の試作	1	73 ~ 76
佐々木英人 <small>共・樋口</small>	新単位“AVON”の提唱(モル概念の明確化と統一)	2	9 ~ 15
	<small>共・清水</small> タール系食用色素の分析的研究(第1報)		
	薄層クロマトグラフィによる分析	5	81 ~ 90
清水正夫 <small>共・佐々木</small>	タール系食用色素の分析的研究(第1報)		
	薄層クロマトグラフィによる分析(1)	5	81 ~ 90
田中道雄	翻刻・俳書『安楽音』	2	55 ~ 86
棚町知弥	大御神忌と連歌 附・連歌屋考(1)		
	——近世太宰府天満宮連歌史 その2——	1	101 ~ 120
	木山紹宅伝稿——太宰府天満宮連歌屋考(上)——	2	87 ~ 112
	大鳥居信岩・信助伝稿 附・上座坊実右について		
	——太宰府天満宮連歌史 その5——	3	109 ~ 138
	翻刻・素丹発句		
	——肥後連歌史のうち桜井素丹伝資料(1)——	4	81 ~ 92
	北野社古記録(文学・芸能記事)抄(1)	4	93 ~ 118

# 送風機吸込側流れの実験的研究（その3）

清 森 宏 之 助

<昭和44年9月1日受理>

## Experimental Study on the Flow at the Suction Side of Multi-blade Fan (part 3)

Various experiments have been made to investigate the influence of flow conditions at the suction side of a multi-blade fan upon fan performance. In this report, the results of the experiment conducted on the velocity profiles at the inlet and the exit of the multi-blade fan fixed with the conventional blades and the newly-designed are related.

The difference between the present experiment and the former is that the four measuring positions corresponded to the ones at suction side are set up just behind the impeller. It is showed that any region at the exit side of the impeller has an axial component of velocity. As a conclusion, the general flow conditions are almost thoroughly understood, but some problems with regard to the design of blade remain unsettled.

Kounosuke Kiyomori

### 1. ま え が き

シロッコファンの性能に重要な影響を与える吸込側の流れの状態を調べる一、二の実験をおこなってきた。これに関しては最近 F・B・GESSNER が纏めた実験的研究があり、吸込性能に関する研究が漸次注目されてきた。本報告ではさらに実験を補足して翼前後の流れの状態を二種類の羽根車について調べた。

流体の翼通過時の流れを調べるには吸込側の速度分布に関連して吐出し側の速度分布も調べる必要があり、これは前回測定したが、その位置が適当でなかったため、改めて吸込側測定位置に対応する翼出口側の4断面について測定をおこなった。また送風機の仕様（風量、風圧）を同一にした他の翼車を設計し、この翼車について回転数を変更した場合の流れの分布状態を検討した。測定値の整理は前回と同じく検定曲線（第2報第8図）に基いて纏めた。

### 2. 実 験 目 的

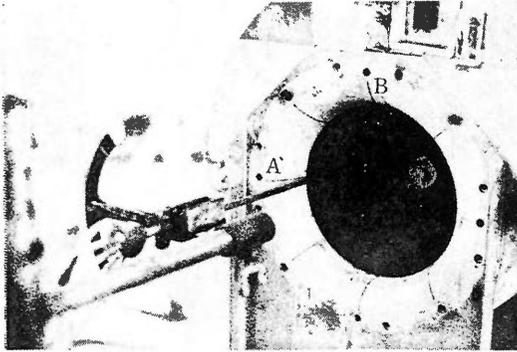
第1報において述べたように、タフトにより流れを観察すると、翼の前後における流入、流出域において、後者の方が流線が密になり、流れは半径方向に加速されていることがはっきりわかる。流体は翼通過後に半

径方向と回転方向との分速度をもち、吸込口（ベルマウス側）に近づくにつれて半径方向の成分が減少し、軸方向の流れは認められなかったが、この点を確認するうえからも今回の実験をおこなった。第2報では翼通過後の測定点は1個所で、その位置が翼から比較的にはなれているため翼直後の流れとは認めにくいので、翼直前の位置に対応し新たに測定点を設けた。なお、今回は翼のみを新規に設計して、同様の測定をおこない、流れの一般的傾向を確認した。

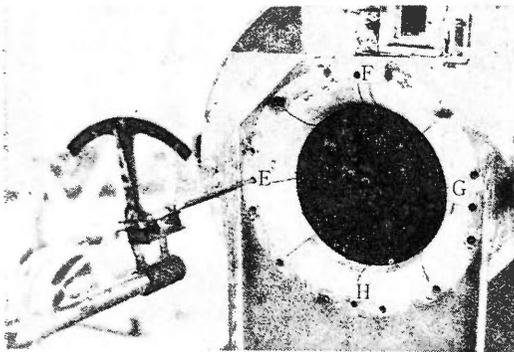
### 3. 実 験 装 置 及 び 実 験 方 法

実験装置一式は前報のものと同じである。また流れの計測には予かじめ検定した5孔ピトー管を用いた。このピトー管を供試ファンの測定部位置に挿入し、前報の場合と同様に特性曲線上の主要4点の流量（全開、最高効率点、最高圧力点、失速点）について流れの状態を調べた。ただ測定点を追加して位置をやゝ変更した。

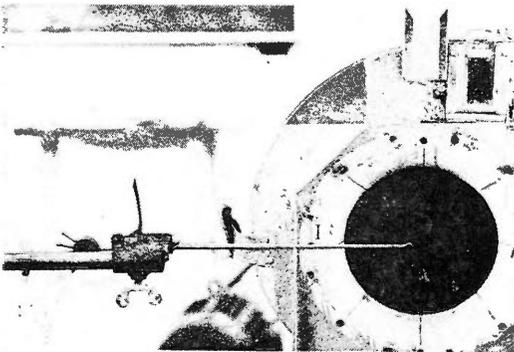
図1～3にその測定位置を示す。A, B, C, D 点は羽根内端より中心に向かい20mm, E, F, G, H 点は羽根外端より10mm離れた位置で、いずれもプローブ先端をファン軸線方向に移動して計測した。I断面はベルマウス端面より20mm外側で水平に直径方向にピトー管を



第 1 図



第 2 図



第 3 図

移動した。

実験にあたっては、まず  $P_4 = P_5$  なるように yaw angle を求め、つぎにその状態で  $P_1, P_2, P_3$  を測定し、 $(P_2 - P_3)$ 、 $(P_2 - P_1)$  の値と検定曲線とより、その点の動圧並びに pitch angle を求めた。(註、 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  は第 2 報参照)

yaw angle の基準面はいずれもファン軸線を含む平面をとった。なほピトー管の構造上、pitch angle が  $45^\circ$  以上の測定は不安定領域にはいるので、本実験の場合もこれ以上の角度をもつ流れの実験はおこなっ

ていない。

#### 4. 翼車の設計

多翼送風機では流量大きく、短い翼で大きい全圧上昇を得ようとするので、相対速度の減少による静圧上昇は期待できぬ。流体が半径方向に流入する場合、全圧上昇に関する Euler の式は  $H_{th\infty} = U_2 C_{V2}/g$  ( $U_2$  : 翼出口側周速,  $C_{V2}$  : 翼出口側の絶対速度の円周方向分速度,  $g$  : 重力の加速度) で示される通り、周速が与えられると  $C_{V2}$  を大きくするように設計しなければならぬ。これには前向き羽根が最も都合がよく、 $w_1 = w_2$  ( $w$  は相対速度, 添字 1, 2 は翼入口, 翼出口を示す。) のとき  $C_{V2}/U_2 = 2$  となり、全圧上昇が非常に大となる。

いま羽根数が無限大のとき、流体の全圧上昇を  $P_{tH\infty}$ 、水頭の上昇を  $H_{th\infty}$ 、単位体積重量を  $\gamma$  とすれば、 $P_{tH\infty} = \gamma H_{th\infty}$  の関係がある。また  $H_{th\infty} = \frac{1}{g} U_2 C_{V2}$  であるから、すべり係数を  $\mu$ 、圧力係数を  $\eta_M$  とすれば、 $\mu = H_{th}/H_{th\infty}$   $\eta_M = H/H_{th}$  であるから、設計圧力  $P$  は  $P = \eta_M \mu \frac{\gamma}{g} U_2 C_{V2}$  となる。デイフューザをも含めた遠心送風機の圧力計効率  $\eta_M$  はつぎのようになる。(1)

$$\eta_M = 1 - \frac{\eta_M}{\psi} \left[ (\zeta_b + \zeta_f) \frac{\phi^2}{16k_b^2 \nu^4} + \zeta_f \nu^2 + \zeta_D \frac{\phi^2}{4\mu^2 \eta_M^2} \right]$$

こゝで  $S_f$  : 羽根車の形状抵抗および摩擦損失係数

$\zeta_b$  : 翼入口曲りの損失係数

$\psi$  : 圧力係数  $\frac{P}{\frac{\gamma}{2g} U_2^2}$

$\phi$  : 流量係数  $\frac{Q}{\frac{\pi}{4} D_2^2 U_2}$

$k_b$  :  $\frac{\text{羽根入口巾}}{\text{入口直径}}$

$\nu$  : 内外径比  $\frac{D_1}{D_2}$

$\zeta_D$  : 渦形室内での損失係数

一応の  $\eta_M$  の見当をたてるため、送風機の仕様を風量  $75 \text{ m}^3/\text{min}$ 、送風機全圧  $85 \text{ mmAq}$ 、回転数を  $1900 \text{ rpm}$ 、翼入口径  $246\phi$ 、出口径  $310\phi$  とすれば、 $\phi = 0.536$ 、 $\psi = 1.46$ 、 $\nu = 0.794$  となり、また  $\mu = 1$ 、 $\zeta_b = 0.1$ 、 $\zeta_f = 0.2$ 、 $\zeta_D = 0.25$  および翼の入口有効巾を  $50\%$  と仮定すれば、 $k_b = \frac{0.5b_1}{D_1} = 0.304$  となるから、これらの値を前式に代入して  $\eta_M$  を求むれば、 $\eta_M = 0.737$  となる。

しかしながら多翼送風機では、翼流入時に曲りの内側で剥離を生じ、また半径方向の翼の長さが短いので、流体が翼に沿って流出しえないことを考慮すれば、

$\eta_M \cdot \mu = 0.737$ の値は大きすぎる。そこで  $\eta_M \cdot \mu = \frac{1}{1.5}$ と仮定すると、 $P = \eta_M \mu \frac{\gamma}{g} U_2 C U_2$ の関係から  $\frac{P}{\eta_M \mu} = \frac{\gamma}{g} U_2 C U_2$ となる。

前述の通り、翼流入角を  $\beta_1$ 、流出角を  $\beta_2$ 、さらに  $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$ とし、また翼入口、出口巾  $b$ を等しいとすれば  $w_1 = w_2$ となるゆえ、 $\tan \beta_1 = \frac{D_2}{D_1}$ 、 $\tan \beta_2 = \frac{D_1}{D_2}$ 、 $\frac{C U_2}{U_2} = 2$ の関係があり、これより  $\beta_1 = 51^\circ 35'$ 、 $\beta_2 = 38^\circ 25'$ となる。したがって、 $\frac{P}{\eta_M \mu} = \frac{\gamma}{g} U_2 C U_2 = 2 \frac{\gamma}{g} U_2^2$ 、ゆえに  $U_2 = \sqrt{\frac{P}{\eta_M \mu} \frac{g}{2\gamma}}$  と  $\frac{\pi D_2 N}{60} = U_2$

とより回転数  $N$  を求めると  $N = 1420rpm$ となる。なほ  $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$ 、 $w_1 = w_2$ の関係があるときは、翼入口の半径方向の流速を  $C_{m1}$ とすれば  $C_{m1} = U_2$ となるので、体積効率  $\eta_v = 0.95$ 、翼の有効巾を全巾

$b$  に対し  $x\%$ とすれば  $C_{m1} = \frac{Q}{\eta_v \pi D_1 b x} = U_2$ より  $x \cong 50\%$ となり前の仮定と一致する。

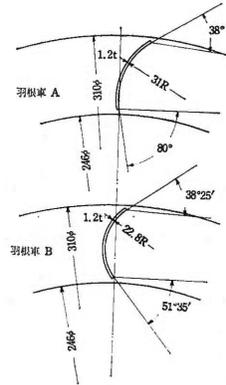
翼数は前報の供試ファンが  $z = 36$ であるので、これと同一枚数を選べばピッチ  $t_2 = \frac{\pi D_2}{z} = 27mm$ となる。通常翼数が少ないときは翼の曲率半径  $r$ は  $r = t$ とし、多くなれば  $r = 2t$ となるように設計するので  $r \cong 0.85t$ とし、 $r = 22.8$ とした。このようにして設計した翼を図4に示す。なほ図には前報までの供試翼を参考のために示す。以下前報の供試翼を羽根車A、新しい翼を羽根車Bとす。

5. 実験結果

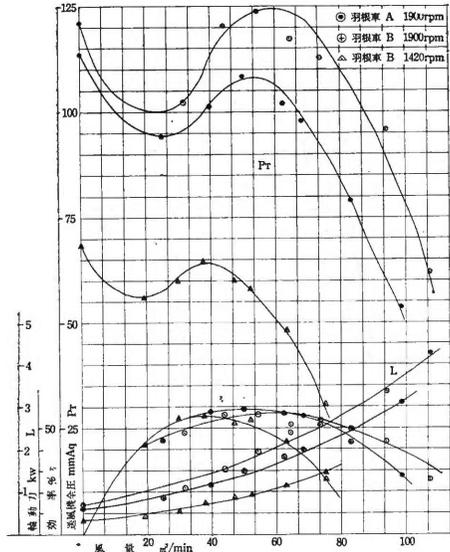
供試送風機の特性格線を図5～6に示す。図5は風量に対する送風機全圧、軸動力、効率の曲線で、図6はこれらを無次元表示したものである。この場合、圧力係数  $\psi$  には  $\psi = \frac{P}{\rho U_2^2}$  を、流量係数  $\phi$  には

$\phi = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} D_2^2 U_2}$  を、また動力係数  $\lambda$  には  $\lambda = \frac{L}{\frac{\rho}{2} \frac{\pi}{4} D_2^2 U_2^3}$  を用いた。したがって  $L = \frac{QP}{\eta}$ の関係から  $\lambda = \frac{\phi \psi}{\eta}$ となる。前述のように実験は翼AとBについて1900および1420rpmでおこなった。

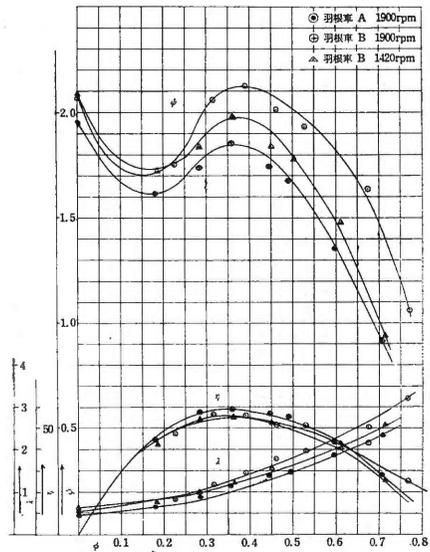
また測定風量は前回と同じく全開、最高効率点、最高圧力点、および失速の4点とし、測定位置はA, B, C, D, E, F, G, H, Iの9方向である。測定結果を図



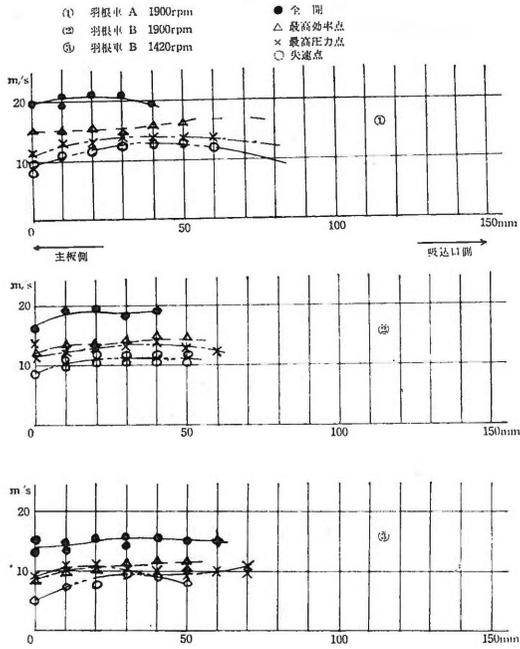
第4図 供試翼



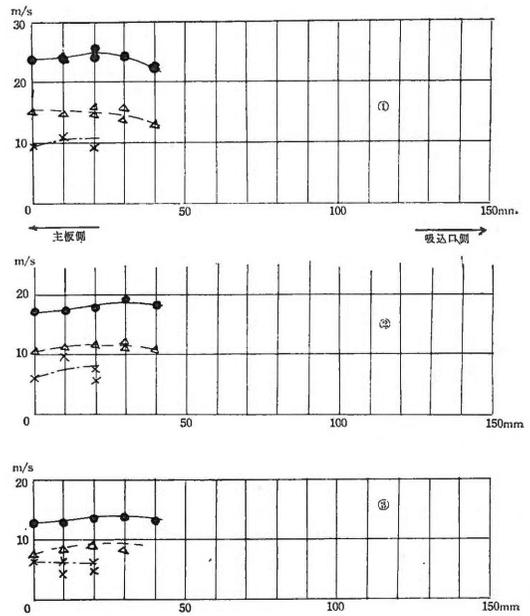
第5図 特性格線



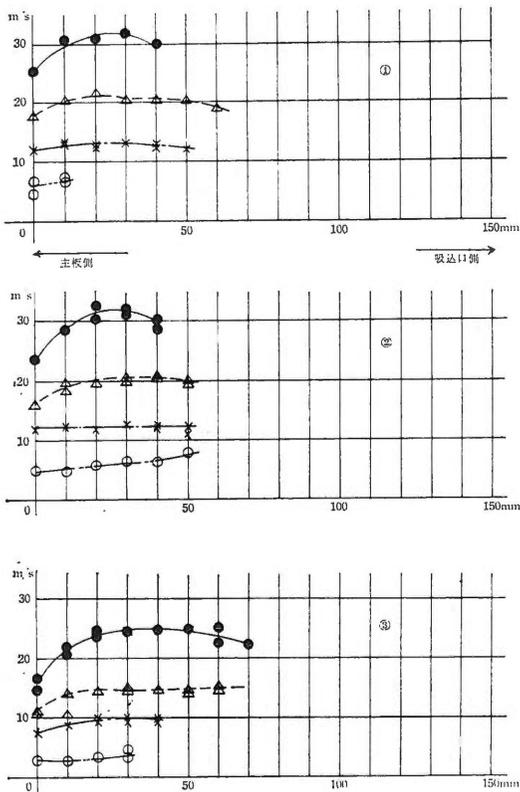
第6図 特性格線



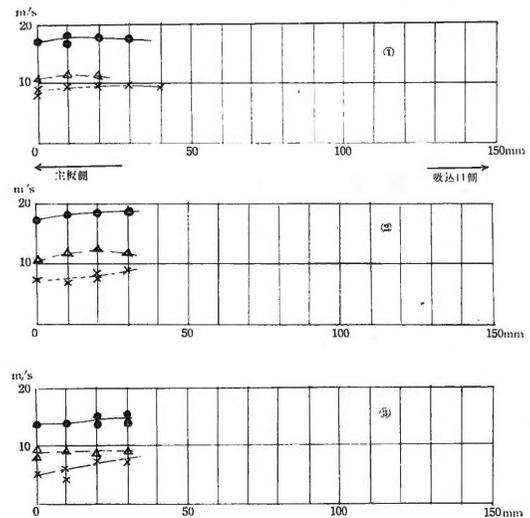
第7図 速度分布 (測定位置 A)



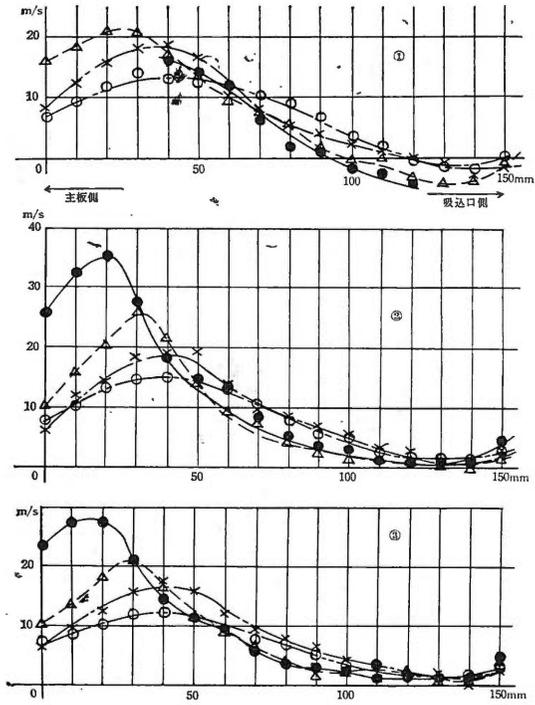
第9図 速度分布 (測定位置 C)



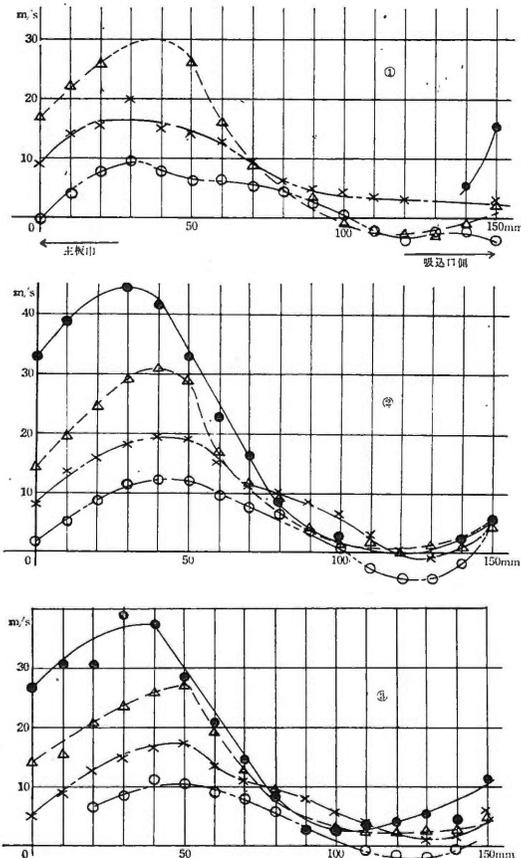
第8図 速度分布 (測定位置 B)



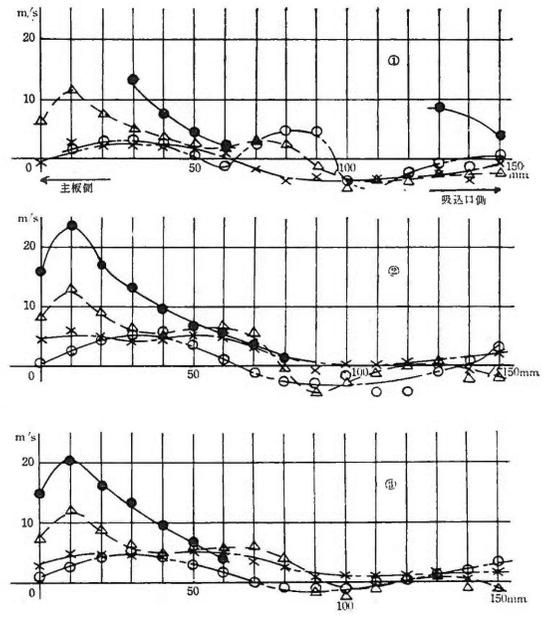
第10図 速度分布 (測定位置 D)



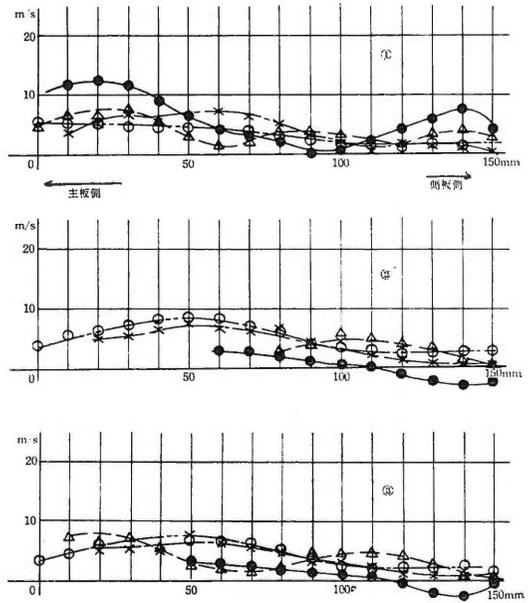
第11图 速度分布 (测定位置 E)



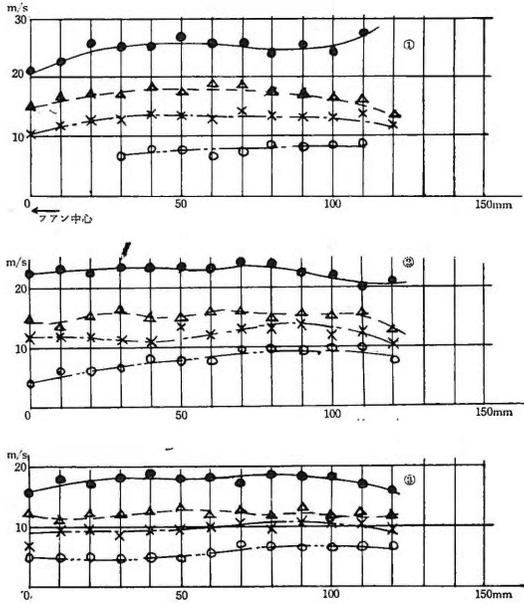
第12图 速度分布 (测定位置 F)



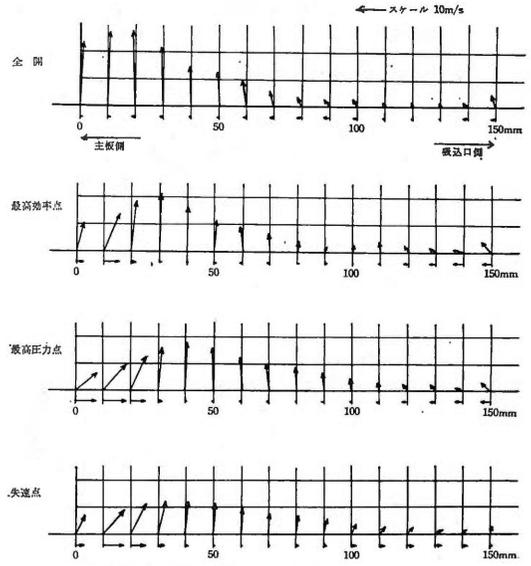
第13图 速度分布 (测定位置 G)



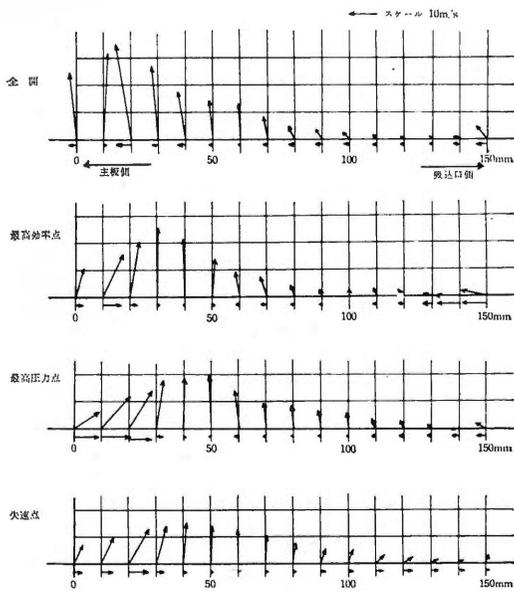
第14图 速度分布 (测定位置 H)



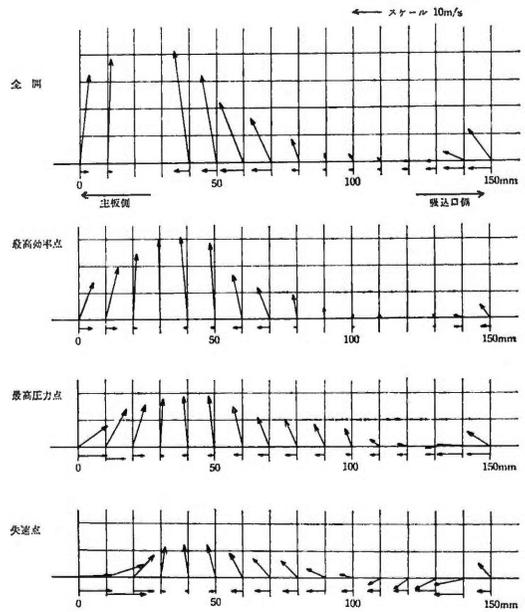
第15図 速度分布 (測定位置 I)



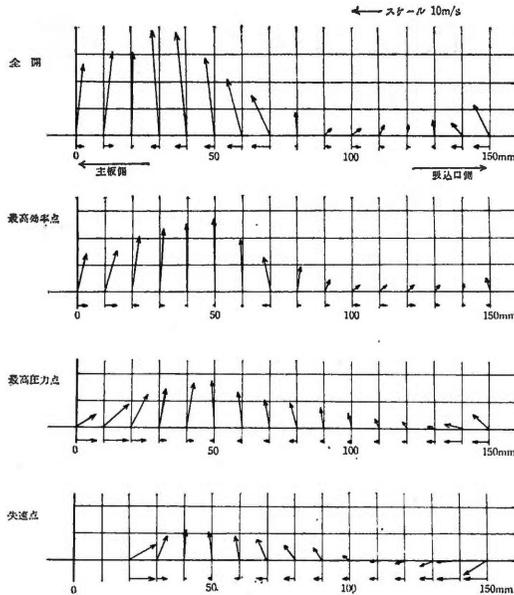
第17図 速度分布  
(測定位置 E, 羽根車 B, 1420rpm)



第16図 速度分布  
(測定位置 E, 羽根車 B, 1900rpm)



第18図 速度分布  
(測定位置 F, 羽根車 B, 1900rpm)



第19図 速度分布

(測定位置 F, 羽根車 B, 1420rpm)

7~15に示す。これらの曲線は軸線を含む平面上の測定点における半径方向の分速度を縦軸にとったもので、流量を流速で示している。これは測定点における動圧, pitch angle, および yaw angle が検定曲線より求まるので、半径方向分速度 = (測定点の風速)  $\times$  cos (pitch angle)  $\times$  cos (yaw angle) の関係より容易に求まる。たゞ I の位置においては軸線に平行な方向の分速度を示すことになる。これらの線図より各断面の流れの状態が容易にわかる。

つぎに羽根出口側の軸線を含む平面内における流れの大きさとお方向を求めたものが図16~19である。本実験の測定方法によれば、軸方向の流れの成分は(測定点の風速)  $\times$  sin (pitch angle) であるから、この値を横軸とし、先に求めた半径方向の分速度即ち(測定点の風速)  $\times$  cos (pitch angle)  $\times$  cos (yaw angle) を縦軸とし、E, F断面のものを測定風量4つについて纏めたもので、縦、横軸とも1目盛を10m/sで表わしてある。たゞ羽根車Bに対し1900と1420rpmについてのみおこなった。

## 6. あとがき

1. 吸込側測定位置ではいずれも吸込口に近づくほど動圧は大きくなるが、一方 pitch angle も大きくなるゆえ、これを半径方向の分速度で示すと図のよう

に比較的一様化される。測定に際してはC, D領域の乱れが激しく、測定値が少なかったのに比し、A, B領域では比較的測定点が多くとれ、とくにB点近傍の半径方向流速が他に比し著しく大きいことがはっきり認められる。

流入条件として吸込側はどの点も同一で、これは流出後の渦形室の形の影響によるものと推察される。未測定点の位置はいずれも本実験用のプローブでは測定できなかった。そのため吸込側の測定値より翼の作動有効巾は決定できない。

2. 羽根出口においてはE, F, G, Hいずれの位置も pitch angle が  $45^\circ$  以下で図のようになる。最大流量の領域は吸込側のB断面に対応するF断面で、またE, F断面では翼巾に換算して主板より20%附近、G, H断面では7%附近である。いずれの断面も吸込口に近づくにつれて半径方向流速が減少し、なかには負の値をもち、吸込口側で逆流を生じていることがわかる。とくに捲きはじめGの位置においてこの傾向が激しい。これらの曲線群より吐出側の作動有効巾は主板の40~50%とみるべきであろう。

3. 羽根車Bを1900と1420rpmで回転させたとき、流れの状態が略相似であることが認められる。

4. 図6に示すように、羽根車Bを1420rpmで運転したとき、設計点の風量  $75\text{m}^3/\text{min}$ , 全圧  $85\text{mmAq}$  の性能が得られない。しかし図からわかるように、効率は羽根車Aに比して低下していない。したがって送風機の比例関係式を用いて設計点を求めると、約1900rpmまで回転数を高めるとよい。このときの出口側周速  $U_2$  および設計に用いた関係式  $Cv_2 = 2U_2$  とより  $P_{thoc}$  を求めると  $P_{thoc} \cong 230\text{mmAq}$  となり、この  $P_{thoc}$  と設計値  $P$  との関係は  $P = 85\text{mmAq}$  より  $P_{thoc} = 2.7P$  即ち  $\eta_M \mu = \frac{1}{2.7}$  となり、最初の仮定  $\eta_M \mu = \frac{1}{1.5}$  と全然異なった値となって問題は残るが、之は今後究明したいと考えている。

最後に本実験を実施するにあたり、終始御懇切な指導を賜りました九州大学生井教授並びに実験に協力して頂きました学生諸君に厚く御礼申し上げます。

## 参考文献

(1) 生井武文著：遠心軸流送風機と圧縮機

F. B. GESSNER

An Experimental Study of Centrifugal Fan Inlet Flow and its Influence on Fan Performance February 10, 1967

## 有明工業高等専門学校紀要

## 執筆別総目録(1~5号)

&lt;発行日&gt;

第1号	昭41. 3. 20
2	昭42. 3. 20
3	昭42. 12. 30
4	昭43. 12. 28
5	昭44. 12. 26

## その2 (p. 50 につづく)

<執筆者>	<題目>	<巻号>	<ページ>
田吹長彦	<i>Four Quartets: An Interpretation (1)</i> "Burnt Norton" and "East Coker"	4	55 ~ 70
	<i>Four Quartets: An Interpretation (2)</i> "The Dry Salvages" and "Little Gidding"	5	113 ~ 130
辻一夫	合成インピーダンスの作図法	3	67 ~ 70
	3端子薄膜抵抗の等価抵抗近似計算法	5	71 ~ 76
寺本匡謨	教科、身体の形態と体力、運動能力の相関についての一考察	1	55 ~ 72
	H・Rの指導・経営に関する実践上の問題点	2	1 ~ 7
	共・荒尾 本校生の生活・保健・クラブ活動・一般的思考について	3	15 ~ 38
	共・荒尾 本校学生の性格検査に基づく考察	4	1 ~ 19
	学校保健の一考察	5	1 ~ 10
永田達郎	切削加工における傾きの角計算	1	77 ~ 83
	The Lattice Theory of Liquid State under the Condition That Can Make Two Molecules Involve into Each Cell.	1	84 ~ 88
	Lattice Vibration of Two-Dimensional Triangle Lattice 1.	2	16 ~ 20
	軟鉄の電気溶接における境界	2	25 ~ 28
	Liquid Molecules in the Non-spherical Cells	3	39 ~ 46
	軟鉄の電気溶接における境界(2)	3	47 ~ 54
	共・石崎 格子熱伝導度の理論計算	5	23 ~ 49
中村安生	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> の電流電圧特性について	4	23 ~ 26
西誠也	ヒューマニストとしてのコールドウェル	2	43 ~ 54
	アースキンコールドウェル試論 ——転換点としての『ジョージア・ボーイ』——	3	79 ~ 88
	フォークナーにおける南部貴族の解体 ——その「響きと怒り」の場合——	4	71 ~ 79
樋口大成	共・佐々木 新単位"AVON"の提唱(モル概念の明確化と統一)	2	9 ~ 15
	基礎課程の化学教育に関する一考察	4	27 ~ 36
日野尚志	大牟田市における条里制の諸問題	1	121 ~ 124
	北九州・筑豊地域における鉄道の発達と現況ならびに 鉱工業生産と輸送の関係について	3	1 ~ 13
松尾保男	Primitivism In <i>The Woodlanders</i>	5	101 ~ 111
室永芳三	五代三司軍将の名称と性格について	3	139 ~ 144

# 軟鋼丸棒の回転曲げ疲れき裂の伝ばについて

小 田 明

<昭和44年8月25日受理>

## A Study on Fatigue Crack Propagation in Rotary Bending of Mild Steel Round Bars

The propagation of fatigue crack in rotating-beam test on mild steel round bars was observed by means of microscopy and heat tinting of the specimens. The main results are as follows:

The fatigue crack starts at one or more points on the surface of specimen and grows continually larger in different pattern according to the shape of specimen and the stress amplitude. During the former stage of crack growth, the area of crack,  $\Sigma a$ , increases with the number of stress cycle,  $n$ , in the form of  $\Sigma a/A = i e^{c \cdot n/N_t}$ , where  $A$ : sectional area of the specimen,  $N_t$ : stress cycle of life,  $i$  and  $c$ : constants, which shows better agreement with the plots of experimental data than the experimental equation between the depth of crack and the number of stress cycle does. After the former stage the crack propagates more rapidly until the specimen ruptures.

Akira Oda

### 1. ま え が き

疲れき裂の発生と伝ばに関する従来の研究<sup>(1)~(6)</sup>、<sup>(15)~(20)</sup>では、疲れ破損の初期段階における結晶学的挙動やき裂の発生と伝ばの機構が、物理的あるいは機械的性質の測定、X線回折法、ミクロあるいはマクロ的観察などによって調べられ、いろいろな実験事実が明らかにされている。しかしながら多くの関心はき裂の発生に先行するすべりやき裂先端の微小塑性領域の挙動の解明に向けられ、き裂の発生と伝ばの様相を定量的に観察したものは比較的少いように思われる。疲れき裂の伝ばに関する文献では、き裂の長さや応力および応力繰返し数との関係が論じられているが、板材の平面曲げによるき裂を取扱ったものが多く、丸棒の回転曲げによるものは少い。疲れ寿命の過半を占めるき裂伝ばの状況を実験的に明らかにすることは、軸類などの折損の解明や疲れ小き裂発生を余儀なくされる車輛部品などの設計資料を得るためにも意義あることと思われる。本論文は軟鋼丸棒について回転曲げ疲れ試験を行ない、いろいろな条件で発生させたマクロ的

疲れき裂が応力の繰返しにより伝ばし破壊にいたるまでの過程を顕鏡や加熱着色法により観察して、き裂伝ばの様相の一端を明らかにするとともに疲れ破壊における二三の挙動について述べたものである。

### 2. 試験片および実験方法

一般構造用圧延鋼材 SS 34、径 19mm より所定の長さに採取した素材を 900°C に 1 時間焼なまししたのち、図 1 に示す形状寸法の平滑材と切欠き材に旋削した。

平滑材は標準の形状にすると、き裂の発生点が予測できず、また、き裂発生数を一点にすることが困難に思われたので、ごく浅い円弧状切欠きとし試験片の最小断面部にロックウェルかたき試験機のダイヤモンド圧子によって微小円すい状の圧こん（径約 0.6mm）をつけて、疲れき裂を誘発させるようにした。切欠き材はき裂発生数が多い場合を検討するために用いた。平滑材切欠き材ともエメリー紙 06 まで研磨し、つぎにバフ研磨して顕鏡面をつくり試験に供した。

表 1 に Neuber の方法<sup>(1)</sup>で求めた形状係数（平滑材については圧こんをつけないもの）および後述の実

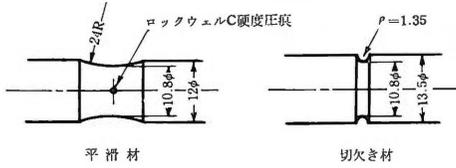


図1 試験片の形状寸法

験結果から得られた切欠き係数を示す。表2に素材の化学成分および機械的性質を、図2にその顕微鏡組織を示す。試験片の一部には材料の都合で、ほかの二本の素材から採取したものをを用いたが、組織は大差はなかった。

表1 疲れ限度,  $\alpha_k$  および  $\beta_k$

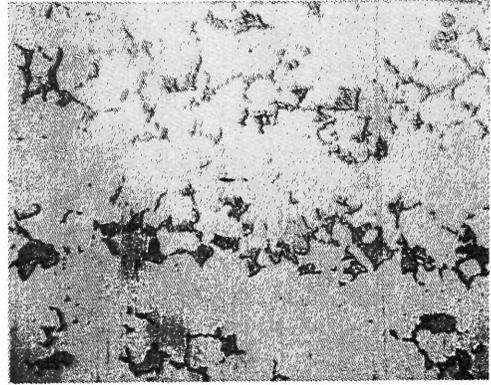
試験片の種類	形状係数 $\alpha_k$	疲れ限度 $\sigma_w$ kg/mm <sup>2</sup>	切欠き係数 $\beta_k$
平滑材	1.05 <sup>注(1)</sup>	20.7	—
切欠き材	1.74	12.8	1.62 <sup>注(2)</sup>

注 (1), (2) いずれも圧こんなし試験片について求めた値をしめす。

試験機は小野式回転曲げ疲れ試験機 (1670 r. p. m) を用い、検鏡のためベッド上に顕微鏡を固定し、所定の応力繰返し数で運転を止めて疲れ過程における試験片表面を検鏡倍率×165および×600で観察した。表面に現われた変化やき裂の伝ば状況は、軸受部に取付けた角度目盛板と試験片つかみに固定した指針により角度を読んで、その位置や長さを測定した。またき裂がある程度伝ばしたいくつかの応力繰返し数で試験片を取

表2 化学成分と機械的性質

化学成分%			機械的性質			
C	Si	Mn	$\sigma_s$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_B$ kg/mm <sup>2</sup>	$\varphi$ %	H <sub>B</sub>
0.15	0.25	0.47	24.8	38.8	32.8	110



腐食: 5%ピクリン酸アルコール溶液 ×165  
フェライト+パーライト

図2 素材の顕微鏡組織

りはずし、350ないし220℃の間で応力繰返し数の増大とともに順次温度を下げて数段階の加熱着色<sup>(1)</sup>を施して、破断後破面の着色模様を万能投影器(倍率×20)のスクリーン上に投影してトレースした。これから加熱着色時の応力繰返し数におけるき裂破面縁線の形状を求め、かつき裂破面面積をプランメータで計測し、き裂破面が拡大する状況を調べた。

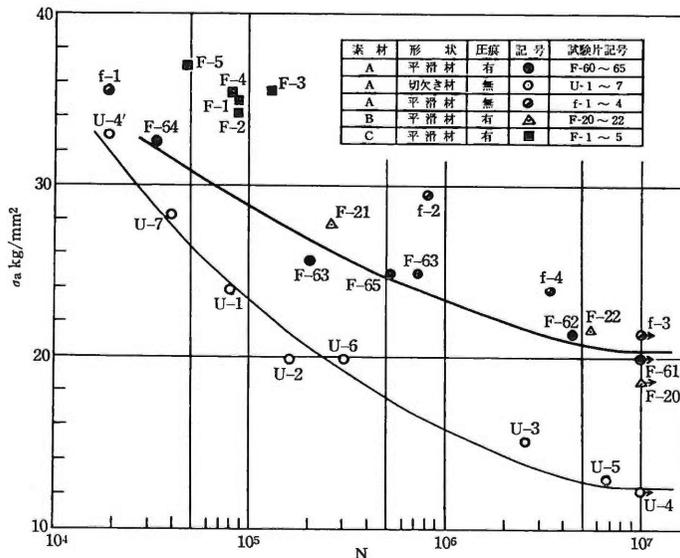


図3 S-N線図

### 3. 実験結果および考察

#### 3.1 S-N 線図

図3に S-N 線図を示す。図には素材Aから採取した平滑材（試験片記号 F-60~65） 切欠き材（試験片記号 U-1~7）の実験結果によって線図が引いてあるが、素材BおよびCから採取した平滑材の結果も合わせて記入した。

#### 3.2 疲れき裂発生時の顕微鏡的様相とき裂破面拡大の状況

き裂が発生する前後のミクロおよびマクロ的挙動についてはすでに多くの文献に述べられているが、処女状態の試験片表面のどこにどのような過程を経てき裂が発生するかという点や、き裂破面の拡大がどのように行なわれるかという点については従来あまり述べられていないので、前述の方法により疲れ進行過程の試

験片表面を全周にわたって詳細に観察した。図4は一平滑材についての観察結果の全記録の一例である。このような記録から主要な結果をまとめたものが図5~7である。図5は平滑材に0ないし3点のき裂誘発点を与えた場合、また図6および図7は切欠き材の観察結果である。それぞれの図は、図の半径方向に応力繰返し数を対数目盛でとり、同心円は各測定時の試験片最小断面部の円周表面を表し、記入された印は後述の各種の変形の発生位置およびき裂の長さを示している。また図には試験片表面における観察結果とき裂破面の状況を比較対照するために、破断面の写真を対応して示してある。なお半径方向の応力繰返し数の図示は、正確に表現しようとする破断近傍で線図がほとんど重なってしまうので、き裂長さの変化が図解できる程度に拡大して示した。これらの詳細はつぎのとおりである。

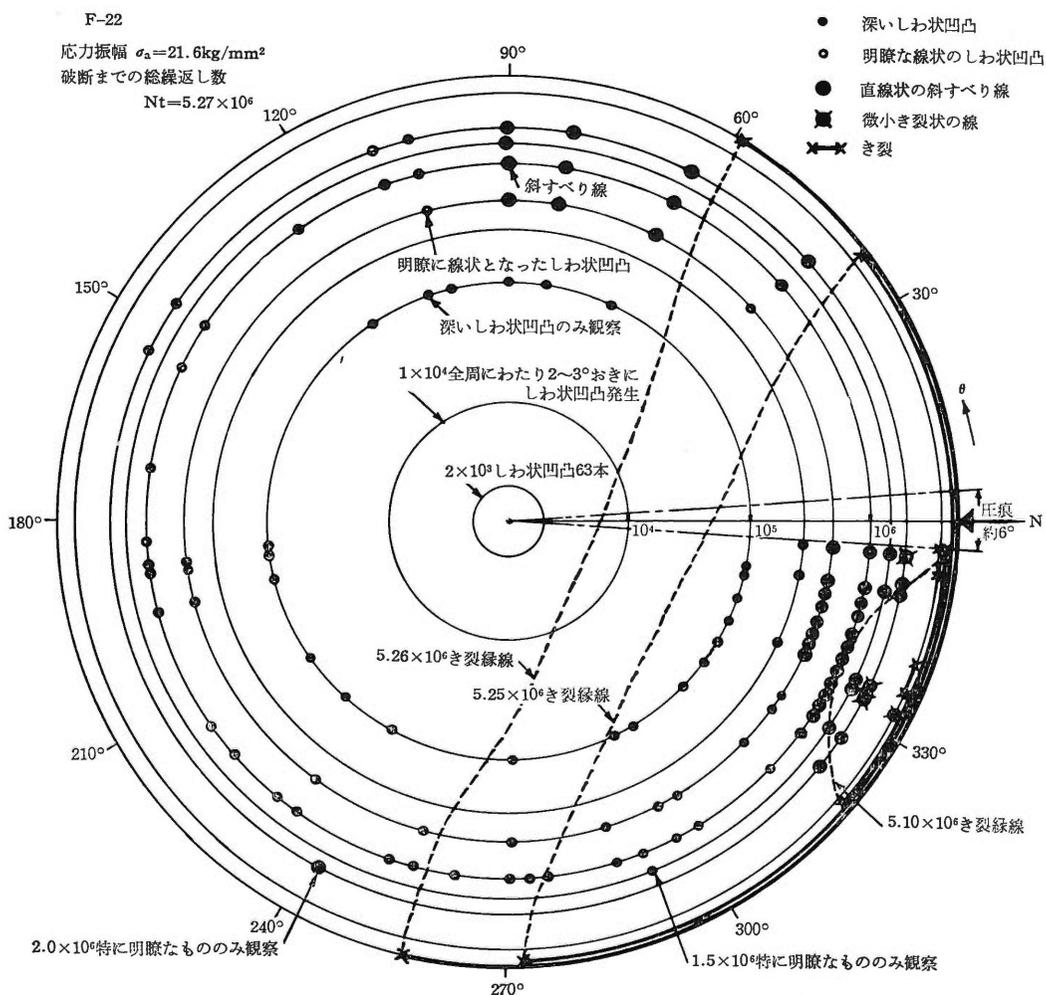


図4 しわ状凹凸・すべり線・き裂の発生状況

### 3.2.1 疲れの進行に伴い試験片表面上に現われる変化

平滑材に応力が繰返されると図4にみるごとくその表面にしわ状凹凸がまず現われ、ついですべり線つきにき裂が発生する。しわ状凹凸は図8の写真で示す形状のもので、主として試験片最小断面部近傍の全周にわたってランダムな位置に発生し、応力を繰返すと数を増した深さを増してしだいに明りょうとなり、ついには曲った線になるが、その時期になるとき裂誘発のためにつけた庄こんの周辺には、しわ状凹凸とは別個に図9に示すように試験片の軸方向に対し斜方向のすべり線が発生する。しわ状凹凸は庄こんの周辺に多

くかつその深さも大きい。応力がさらに繰返されるとすべり線は庄こん周辺に集中的に増大し、やがてそこにき裂の発生がみられるが、まれにすべり線は発生せずしわ状凹凸からき裂が発生することもある。図4はこれらの過程を観察した記録の一例であるが、図にみられるように  $n=2 \times 10^8$  で観察されたしわ状凹凸 63本は  $n=1 \times 10^4$  では全周にわたり 2~3° おきに数を増し、さらに応力繰返しを重ねると一そうその数を増していくので、すべてのしわ状凹凸を一つ一つ追跡していくことは至難である。したがって図に記入してあるように応力の繰返しに伴い、観察の観点を逐次つねにめだつた変化を観察し記録した。それゆえある応力繰返し数のとき記録された点が、その後なんらのめだ

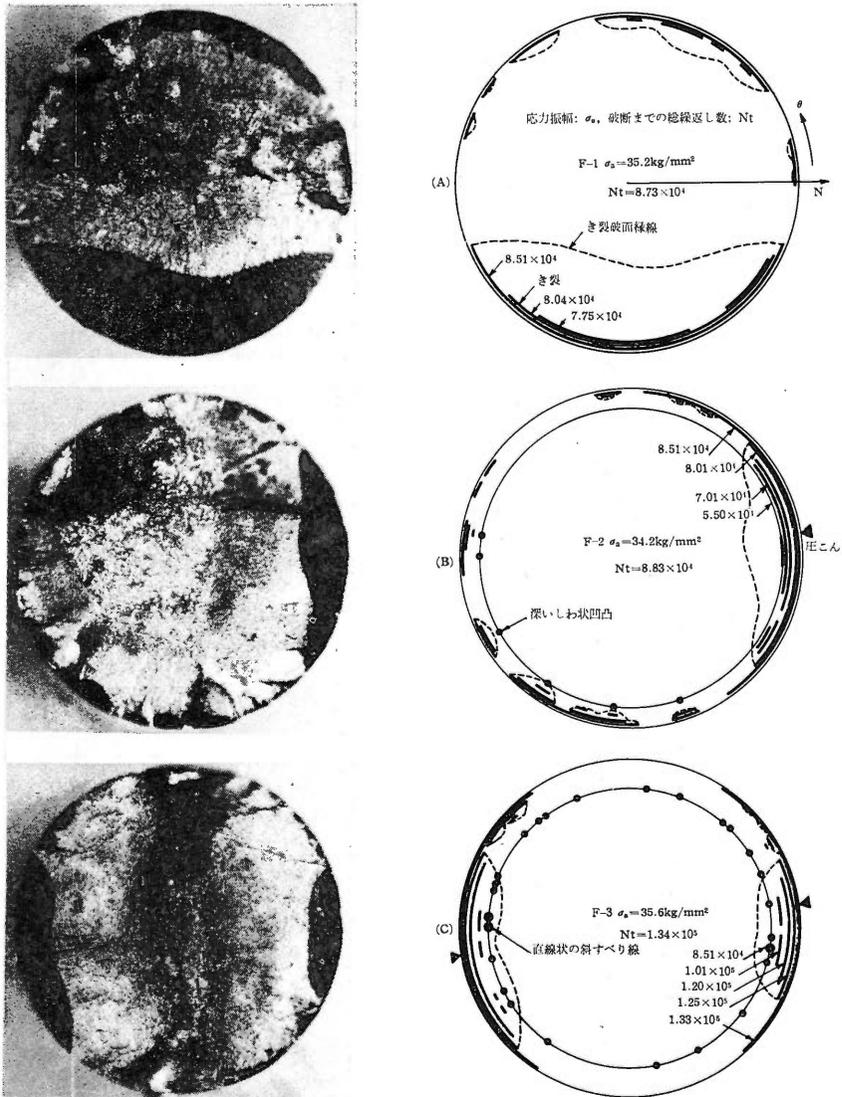


図5 平滑材の疲れ破面とき裂の伝ば状況

った変化を示さず、つぎの観点にもとづく観察で無視しえた場合には点として記録されていない。

以上の過程は試験片に加えられた応力振幅  $\sigma_a$  が供試材の降伏点  $\sigma_s$  よりわずかな高い場合 ( $\sigma_a = \sigma_s \times 1.03 \sim 1.08$ ) に観察されたものであるが、応力振幅がこれよりはるかに高い場合 ( $\sigma_a = \sigma_s \times 1.3 \sim 1.5$ ) にはしわ状凹凸はほとんど認められず試験片表面上の微小変形はすべり線の形ではじまり、応力振幅が降伏点よりわずかな低い場合 ( $\sigma_a = \sigma_s \times 0.75 \sim 0.85$ ) にはしわ状凹凸やすべり線は一そう遅れて発生し数も少く、あまり微小変形を伴わないままき裂が発生した。また応力振幅が一そう低い場合 ( $\sigma_a = \sigma_s \times 0.75$  以下) には全く変化は

認められずき裂も発生しなかった。

切欠き材ではすべり線は発生せず、図8(B)に示すような外見上平滑材の場合と同様なしわ状凹凸が現われ、その凹凸またはわずかな研磨きず上に、ほとんど変形を伴わない微小き裂が発生しただいに伝ばしていくが、高応力振幅の場合にはしわ状凹凸が二三本のすべり線状に変化する場合も認められた。切欠き材では平滑材にみられるようなすべり線が発生しないが、これは切欠き底は応力こう配が大きく軸方向および半径方向の塑性領域が微小な一局部に限られるから、可視的な大きさのすべり線が発生しにくいものと考えられる。

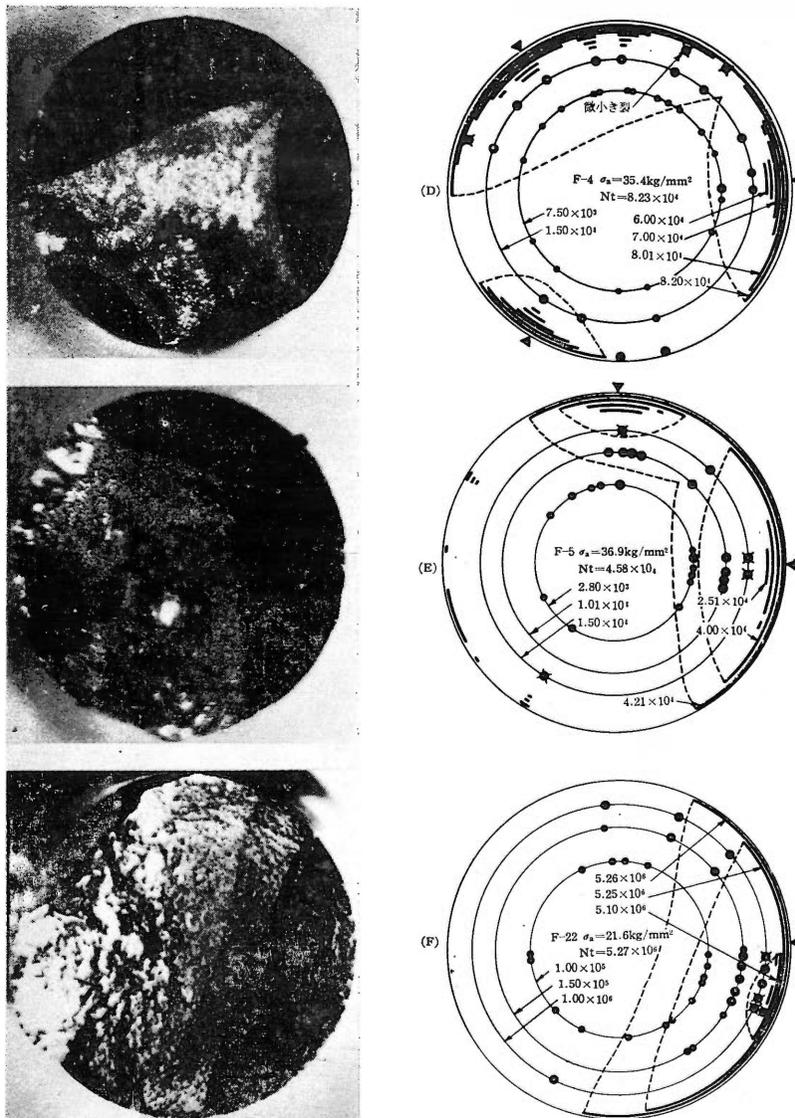


図5 (つづき) 平滑材の疲れ破面とき裂の伝ば状況

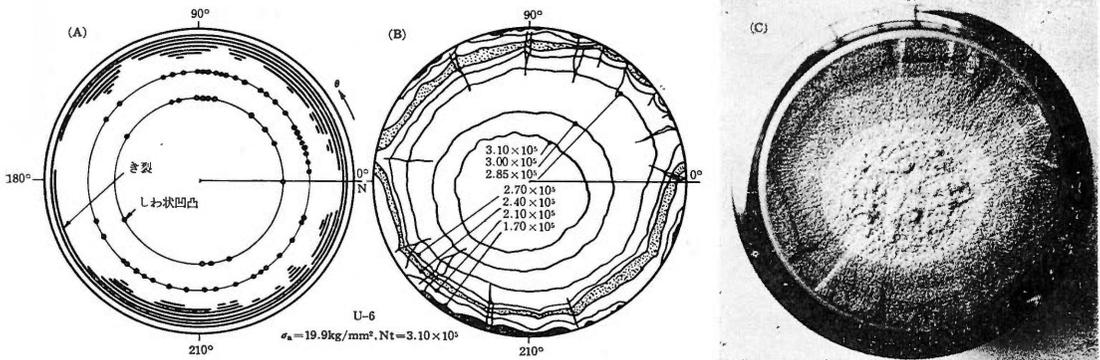


図6 切欠き材の疲れ破面とき裂の伝ば状況

以上の観察により、平滑材切欠き材いずれの場合にも、き裂の発生に先だってすべり線とは外見上異なるしわ状凹凸が認められたが、この凹凸は顕微鏡のピントを上下に移動させると浮き沈みして見え、検鏡倍率を $\times 600$ に拡大するとほとんど見えない。このことからしわ状凹凸はゆるやかな起伏をなしているものと思われるが、疲れ変形の機構から考えて、試験片に加えられる応力振幅とその繰返し数が可視的な大きさのすべりを起させるのに不十分な大きさであれば、顕微鏡で判別しにくい程度の微細すべりも起りうるから、本質的にはすべり線と同じものと思われる。すなわち、しわ状凹凸は応力が繰返された結果、わずかず段階状にすべった微細すべりの累積によって生じた幅広いすべり帯と考えられ、extrusion, intrusionに類似する機構によって生じた疲れ変形特有のものと思われる。

### 3.2.2 疲れき裂破面縁線の形状

き裂が応力の繰返しにより伝ばしたこん跡すなわちき裂破面縁線の形状は、いわゆる疲れ破面の貝がら模様として知られている。この形状を加熱着色法でとらえたものは文献<sup>(7)(8)</sup>にも散見され、また荷重増減法で人為的に貝がら模様を描かせてき裂が一点から伝ばする場合について述べたものはある。<sup>(9)~(13)</sup>しかし材料は一般にミクロ的に不均質であるから、き裂が一点から伝ばする場合はむしろ特例であり、また伝ば中のき裂破面縁線の形状を一時点でとらえても、これをもって他を推測することは難点があるように思われる。そこで伝ば中のき裂破面縁線の変化をより正確にとらえるため、前述の方法により数段階の加熱着色を行なった。図5の写真は平滑材の疲れ破面で、伝ば途中の一時点におけるき裂破面縁線の形状が示されている。(B)~(F)の▼印はき裂誘発のため圧こんを施した位置である。この一連の観察から、き裂はその先端に第二のき裂または弱点がなければ、発生点からほぼ円弧状に成長しその伝ばはしだいに速くなり、円弧の曲率

半径はそれにつれて大きくなるのがわかる。

また、き裂破面縁線の形状は、伝ば中のき裂が二個以上あっても、両者が離れているうちはほとんど互に影響を受けあうことなく成長し、両者が干渉範囲にはいると干渉部の伝ばが速められ、円弧状から無定形の曲線状となる。干渉によりき裂が円周方向に大きく伝ばする場合には、中心方向への伝ばは小さい。図の(D)(E)(F)は圧こんがき裂誘発点として有効にはたらいた場合の円弧状のき裂成長の様相を示すものであり、(B)(C)は近接するき裂が干渉して無定形の曲線状になる場合を示している。また(B)(C)は試験片に存在する弱点から早期にき裂が発生した場合であり、一般に圧こんのない平滑材は(A)のような伝ば状況を示すものが多いようである。ただし応力振幅がある程度小さい場合には従速するように弱点も応力に耐えることができるから、最初に発生したき裂から円弧状の伝ばをすることが多い。

図6および図7は同じ方法で切欠き材について観察した結果を示す。切欠き材では応力集中により切欠き底の各所に微小き裂が多数発生するため、それらが互に干渉してき裂が連結されてゆき、初期には円周上を浅く伝ばし、応力の繰返しに伴ない中心に向かってほぼ同心円状に伝ばしていくことがわかる。しかしその形状はきわめてランダムな変化をなしており、例えば図6(B)(C)にみられるように $1.7 \times 10^6$ 回の応力繰返し数の時期においてき裂が最も大きく伝ばしていた側に、最終破断面が片寄っているような事実すら観察される。

回転曲げによる従来の研究<sup>(7)(8)</sup>ではき裂の伝ば速度を論ずるとき、板材の場合と同様に試験片表面からのき裂深さを用いて実験結果を解析しているが、以上の観察結果から、丸棒の回転曲げ試験片ではき裂深さを求めても正確を期しがたいように思われる。

### 3.3 疲れき裂の伝ば

圧こんつきの試験片では、圧こんの周辺から発生す

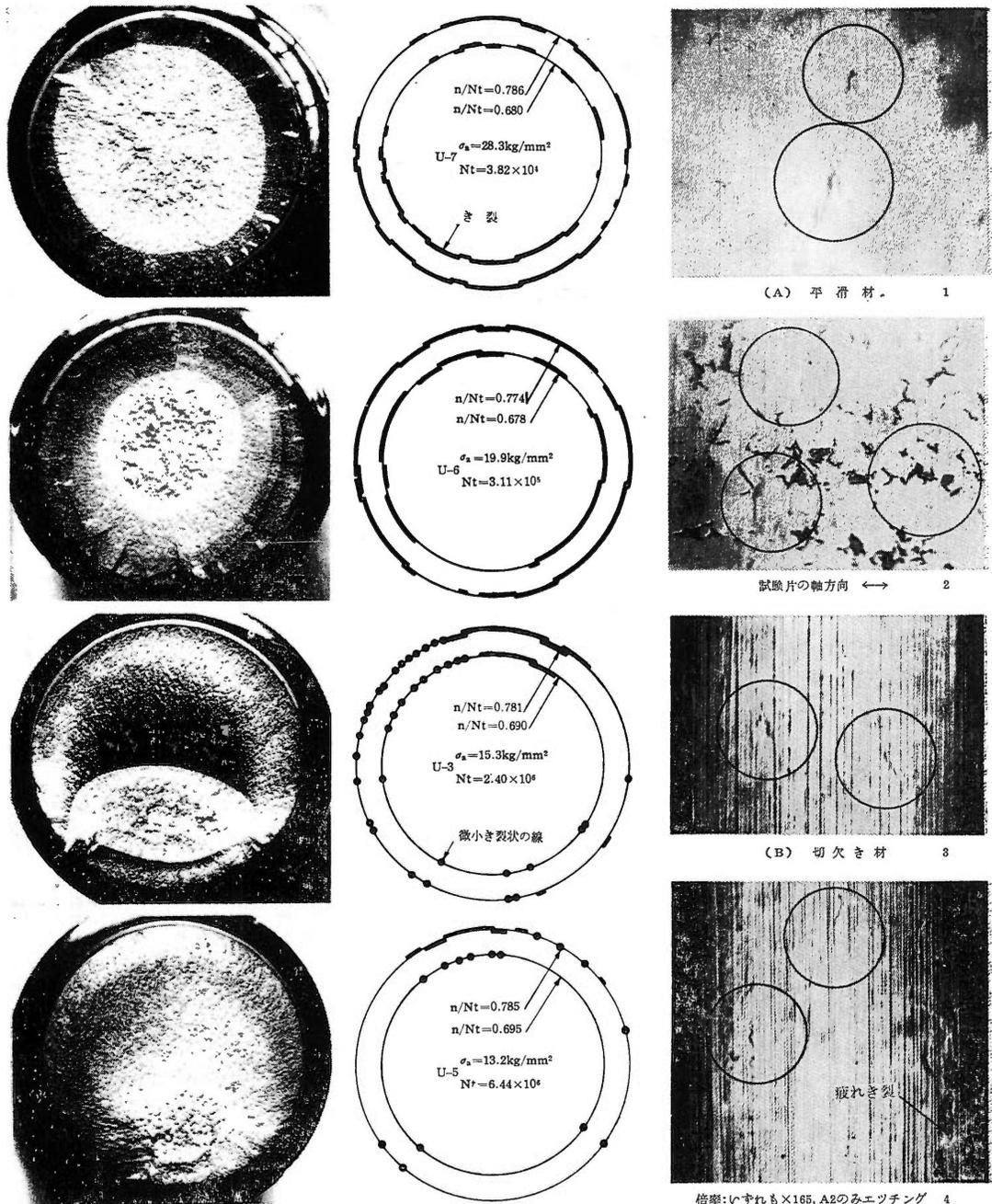


図 7 切欠き材の疲れ破面とき裂の伝ば状況

図 8 しわ状凹凸の形態

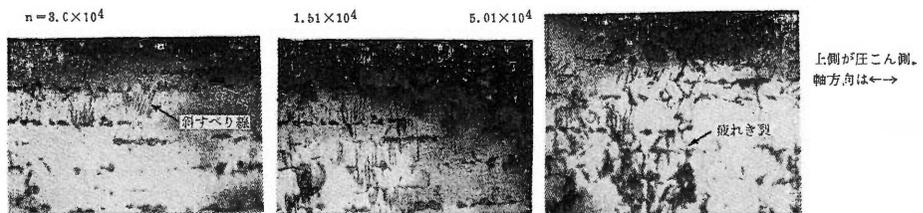


図 9 圧こん周辺のすり線と疲れき裂 (F-2,  $\sigma_a = 34.2 \text{ kg/mm}^2$ ,  $N_f = 8.83 \times 10^4$ )

るき裂が圧こんを完全に横断するまでのき裂伝ばは圧こんの影響を受けるから、以下述べるところは、き裂が圧こんを横断して円周上の長さで約0.6mm、試験片の中心となす角で約6°程度に成長したマクロき裂が、その後伝ばして破断にいたるまでの過程である。

前節に述べたところから、丸棒では円周表面上のき裂長さを求めても、それが即座にき裂の伝ば状況の解析に有効であるとは思われないが、加熱着色によりき裂の伝ば途中の状況をとらえるのには、加熱回数に限度があり五六段階以上の着色は困難であるから、多数回の測定が可能な円周表面上のき裂長さを求め、それと中心方向への伝ばとの関係をまず求めてみた。

### 3・3・1 き裂長さ・応力繰返し数比と応力の関係

図10は平滑材について、試験片の最小断面円周上ではかったき裂の中心角  $\Delta\theta$  の 1/2 (以下き裂長さと呼ぶ) を対数目盛で縦軸にとり、横軸にき裂長さ測定時の応力繰返し数  $n$  と破断までの総応力繰返し数  $N_t$  との比すなわち応力繰返し数比  $n/N_t$  を正常目盛でとった片対数線図である。試験片の圧こんはき裂発生点として有効にはたらくが、まれにはそれ以外に弱点からき裂が発生することもある。図にはき裂が圧こんから発生して円弧状に伝ばしていった試験片と、圧こん以外に弱点からもき裂が2ヶ所から伝ばしていった試験片について、き裂の伝ば状況を比較して示してある。なお素材の異なる二本の試験片は太い実線で区別し、また加熱着色の影響を検討するためにF-62~64には加熱着色した時期が合わせて記入してある。

図からわかるように、き裂が一点から伝ばして破断に達する場合たとえばF-62, 63, 64では、き裂長さ  $\Delta\theta/2$  と応力繰返し数比  $n/N_t$  とは伝ばの大部分を占める部分について直線関係をもち、その直線のこう配と応力振幅との間に、高応力の場合ほどこう配がゆるやかであるという規則性が認められ、また破断に近づく時期から伝ばはしだいに急進して、そのき裂伝ばの曲線は一点に収束するかのごとき傾向を示している。さらにき裂が同じ長さに成長する時期を  $n/N_t$  で比較してみると高応力の場合ほど疲れ寿命における早い時期を占めていることがわかる。すなわちき裂は

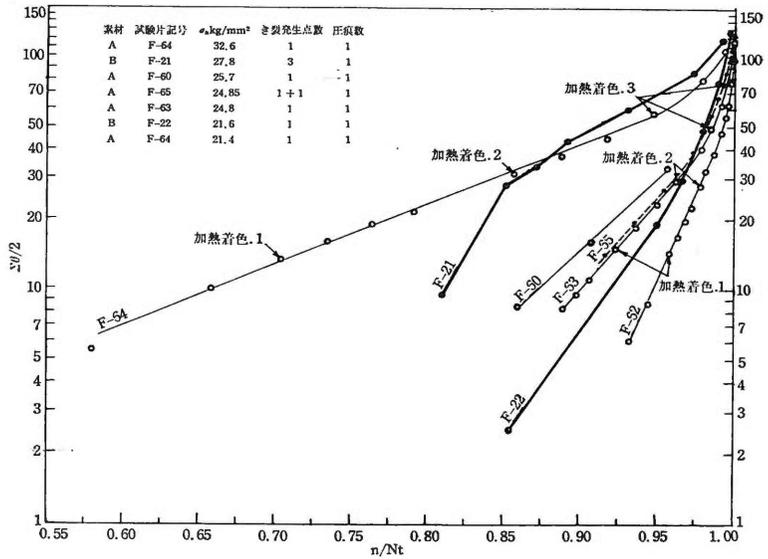


図10 き裂長さ  $\Delta\theta/2$  と応力繰返し数比  $n/N_t$  の関係

高応力の場合ほど早期に発生し、その疲れ寿命の過半を費やして破断に達することが推測される。

これに反し、圧こんと弱点2計3点からき裂が発生した試験片F-21は直線関係を示さず途中から伝ばが速められていることが認められるが、これは弱点からき裂が発生し伝ばしたためである。また同様にF-65は破断に近づく時期に一つの弱点からき裂が発生したため、急進部の曲線のこう配が他と異なり、さらに試験片F-22の急進部のこう配が他と著しく異なるのは、試験片がB素材から採取されたことにもよるものと思われる。F-21およびF-65にみられる事実は、前節で述べたように、き裂が円周方向に大きく半径方向には浅く伝ばしていることの一端を示すものである。切欠き材はその極端な場合であり、き裂発生点が多いから図6および7に示したように、破断に達するよりはるか以前にき裂はすでに円周上を一周している。著者らが行なった高力鋼では  $\rho=0.8mm$  の半円切欠きおよび  $\rho=0.4mm$  の60°Vみぞ切欠き材について、き裂長さと応力繰返し数比との両対数線図で直線関係が得られている。(14)

このようにき裂長さと応力繰返し数比の関係はき裂発生点数に支配され、図10のF-60, 62, 63, 64, のようにき裂が一点から発生し伝ばする場合は片対数線図で直線関係を示すが、同図のF-21や上記の切欠き材のように多点からき裂が発生する場合には前者と異なった傾向が示されている。このことから、回転曲げでき裂長さと応力繰返し数比との間に規則性が成り立つのは限られた場合であって、必ずしも一般性はないように思われる。

しかしながら応力の1サイクルで試験片に与えられたエネルギーにより、き裂は相応の伝ばまたは伝ば準備としてのマイクロ変形をするはずであるから、き裂長さやき裂破面縁線の形状のいかんを問わず、ある広さの破断面または変形域を生ずるものと考えられる。それゆえ、数段階の加熱着色を行なって前述の方法によりき裂破面面積を求めた。

**3.3.2 き裂破面面積・応力繰返し数比と応力の関係**

図11は加熱着色で求めたき裂破面面積  $\Sigma a$  すなわち図5, 6, 7, に示した写真の着色部の面積と試験片断面積  $A$  との比  $\Sigma a/A$  に対する応力繰返し数比  $n/N_t$  の関係を片対数線図で示したものである。図には平滑材と切欠き材の両方の結果を示してある。図において、平滑材については、図10の  $\Sigma \theta/2-n/N_t$  線図と同様に一点に収束する傾向があり、切欠き材についても類似の傾向をもつことがわかる。いま図10と図11の関係を明確にするために、両線図の直線部について実験曲線方程式を求めると両者はそれぞれ  $\Sigma \theta/2 = i' e^{c'} \cdot n/N_t$  および  $\Sigma a/A = i'' e^{c''} \cdot n/N_t$  ( $i', i'', c', c''$  は材料定数) で表わされる。またこのこう配  $i'$  および  $i''$  と応力振幅  $\sigma_a$  の関係を求めると図12のようになる。

図からわかるように、平滑材の  $\Sigma \theta/2-n/N_t$  線図の各直線部のこう配  $i'$  の変化と、 $\Sigma a/A-n/N_t$  線図のそれとはほとんど平行であり、このことは一点からき裂が発生し円弧状に伝ばしていった平滑材については、き裂長さでもき裂破面面積でもき裂の伝ば状況を同様に説明できることを示すものである。

つぎにき裂が多点から発生しランダムなき裂破面縁線を描きながら伝ばする場合の極端な例として、切欠き材について同様な解析を行なった結果は、同じく図11や図12のこう配  $i''$  で示すように平滑材と同じ傾向を示している。

また 図11 から、試みにき裂が試験片断面積の20% (き裂破面面積比0.20) まで伝ばしたときの応力振幅  $\sigma_a$  と応力繰返し数比  $n/N_t$  の関係を求めてみると、図13のようになる。この図は同じ応力振幅でも切欠き材の方が平滑材よりはるかに早期にき裂が成長していることを示している。平滑材については5%き裂の場合も求めて図中に破線で示してあるが、これと20%き裂線を比較することにより、応力振幅が大きいくほど、き裂の伝ばに費やされる期間はその寿命の多くの部分

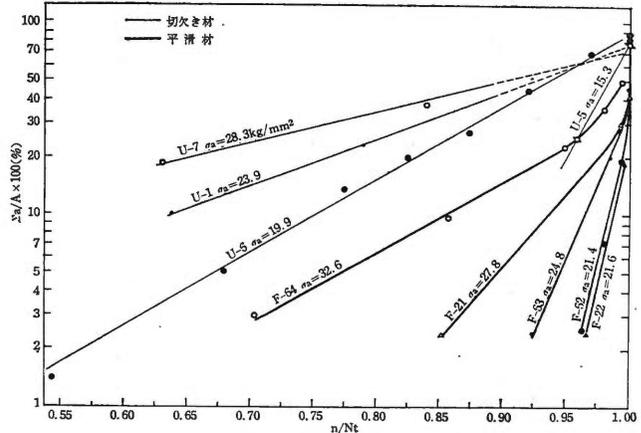


図11 き裂破面面積比  $\Sigma a/A$  と応力繰返し数比  $n/N_t$  の関係

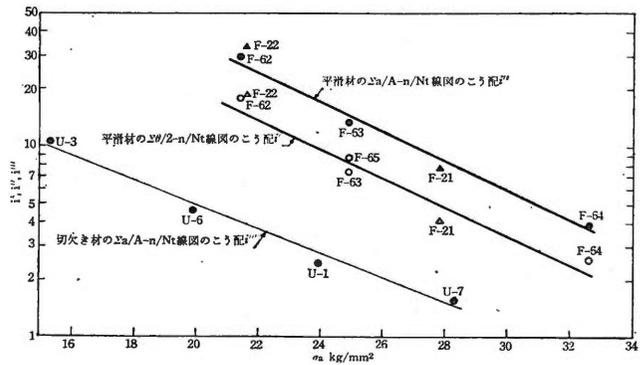


図12  $\Sigma \theta/2-n/N_t$  線図と  $\Sigma a/A-n/N_t$  線図の関係

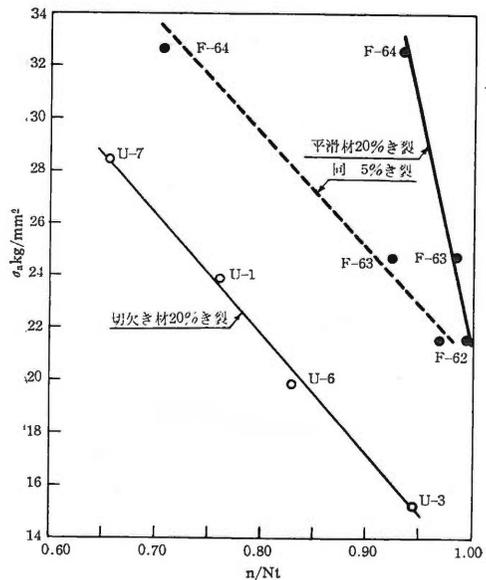


図13 20%き裂を発生させる  $\sigma_a$  と  $n/N_t$  の関係

を占めることがわかる。

以上の解析から、丸棒の回転曲げ疲れでは、マクロき裂の伝ばはき裂破面面積を用いると平滑材切欠き材いずれの場合でも一義的に論ずることができる。すなわち、き裂は応力振幅が大きいほど早期に発生し疲れ寿命の多くの部分を費して破断に達し、その間における伝ばは破断近くまで  $\Sigma a/A = i e^{c \cdot n_i N_i}$  ( $i, c$  は材料定数) で表わされる関係をもち、ついでに急進的伝ばに移行する。また平滑材と切欠き材を比べると、同じ応力振幅でも切欠き材のほうが平滑材よりはるかに早くき裂が発生し、その伝ばに寿命の大部分が費やされることがわかる。

なお、加熱着色がき裂伝ばに及ぼす影響については、加熱による材質の変化が考えられるが、軟鋼焼なまし材では350~220°Cの20分間程度の加熱ではほとんど組織変化はなく、またき裂先端の応力集中は非常に大きく、き裂は引張側になったときほとんど引き裂かれるような状態で拡大していくという考え方<sup>(1)</sup>にしたがえば、マクロき裂の伝ばにとって、加熱着色によるき裂先端の微小塑性域のミクロ的挙動はあまり影響を与えないと考えることができよう。図10のF-62~64の線図をみると、いずれも加熱着色点で線図に著しい変曲点は認められず、実験上からも加熱着色の影響がほとんどないことがわかる。

3.3.3 き裂・応力繰返し数線図

図11よりき裂がある大きさまで伝ばしたときの応力と応力繰返し数の関係を求めることができる。図14は試験片断面積の20%までき裂が伝ばした時期について、S-N線図と比較して示したものである。これは被害率一定のS-N線図といってもよく、S-N線図と類似の曲線となる。本実験のき裂の測定では、き裂が圧こんを横断したのを解析の対象にしているので、き裂発生初期の状況を定量的に図示することはできないが、3.2節で述べたき裂発生時の顕微鏡観察のさい、微小変形は応力繰返しとともに増加していくことが定性的には観察されており、このき裂・応力繰返し数線

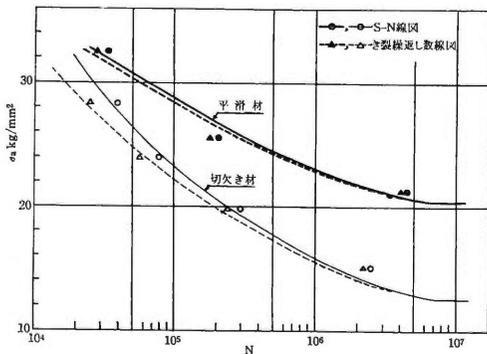


図14 S-N線図とき裂—応力繰返し数線図の比較

図は被害曲線と同類のものと考えられる。

3.3.4 破断近傍におけるき裂の急進的伝ば

き裂が伝ばしていくにしたがって試験片の有効断面積はしだいに減少し、破断直前では破壊条件が静荷重によるぜい性破壊に移行するため、伝ばは急進して破断に達することが文献<sup>(1)</sup>にも述べられているが、本実験でも図11に示すように、き裂伝ばの曲線はある応力繰返し数比から急上昇して一点に収束するような傾向を示している。き裂の急進的伝ばが起こることはき裂の伝ばの機構が変化することを意味する。図11を検討すると、急進的伝ばが始まると思われる時期は、一点き裂で破断にいたる平滑材では、き裂が試験片断面積の約20~25%を占める時期である。これは加熱着色の実験結果と対照すると、図5(F)に一例として示してあるように、き裂破面縁線の形状が円弧状から逆向き弓状に移行する時期とおよそ一致する。この時期を境として、き裂は円周方向への伝ばがしだいに速くなり、試験片の有効断面積はき裂が最も大きく開口する引張り側のとき、長径を中立軸とするだ円形はりに近づきながら、しかも試験片軸心からしだいに偏心して断面積を減少していくから破壊されやすくなり、き裂は急進伝ばして破断することになる。

これに対し切欠き材では、有効断面積は試験片断面積の中央部にほぼ円形に残され、き裂が最も大きく開口する時期においても、圧縮側のき裂は閉じて有効断面としてはたらくから、前者に比べて破壊しにくい。このため急進伝ばは平滑材のそれよりはるかにおくれて起こることになり、線図の直線関係は破断寸前まで保たれるものと考えられる。また最終破断時において平滑材にみられるような著しい変形を伴うことなく、ぜい性破壊の様相を明らかに現わしている。

最終破断面の形態に関しては、平滑材では著しい変形のため測定が困難であるが、観察し得たき裂長さからおおよそ推定されるところでは、一点き裂の場合、き裂長さ  $\theta/2$  で約 140° 程度が破断の時期となり、面積

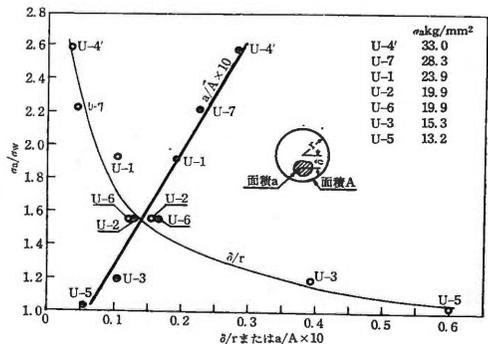


図15 最終破断面積比  $a/A$ 、偏心度  $\delta/r$  と耐久限度比  $\sigma_a/\sigma_w$  の関係

で試験片断面積の約10%程度が最終破断面となる。

切欠き材では最終破断面は明りょうで面積測定も可能である。図15は最終破断面の偏心度および最終破断面面積と耐久限度比の関係を求めたもので、従来の研究結果<sup>(7)</sup>と一致する。

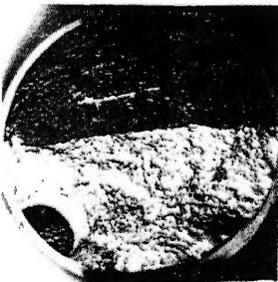
この図から最終破断面面積の大きさは応力振幅の大小に支配されることがわかる。したがって前述の平滑材の  $\Sigma a/A - c/N_i$  線図は一点に収束せず、最終破断面面積も切欠き材と同様に、応力振幅が大きければ大きくなるものと思われる。

### 3.4 圧こんをつけない平滑材および標準平滑材の疲れ破壊

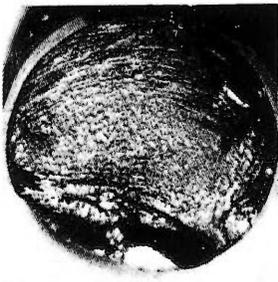
図16は圧こんなしの平滑材の疲れ破面を示す。これらの試験片の実験結果から、高応力振幅では切欠き材の破壊現象に類似し、低応力振幅では圧こんつき平滑材と同様な破壊現象を呈することが認められた。これはき裂誘発点としての圧こんがないから、高応力振幅



f-1  $\sigma_a = 95.6 \text{ kg/mm}^2$ ,  $N_t = 1.44 \times 10^4$



f-2  $\sigma_a = 29.6 \text{ kg/mm}^2$ ,  $N_t = 8.00 \times 10^5$



f-3  $\sigma_a = 24.0 \text{ kg/mm}^2$ ,  $N_t = 8.87 \times 10^6$

図16 圧こんなし平滑材の疲れ破面

では弱点からき裂が多数発生しやすく、したがって円周表面上の各所からき裂が伝ばして切欠き材と同様な過程をとり、これに対し低応力振幅では弱点も応力に耐えてき裂発生数が少くなり、最初に発生したき裂はその先端の鋭い切欠き効果のために伝ばが優先されるから、一点き裂のまま伝ばしやすくなるものと思われる。

標準平滑材の場合には同様な理由から、圧こんなし平滑材と類似の傾向をもつことが推測され、またこれより一そう一点き裂伝ばの形をとる場合が多くなるものと思われる。

## 4. む す び

軟鋼丸棒について、き裂発生までに試験片表面に現われる変化および顕微鏡で観察できる程度（長さ約0.6mm）に成長したマクロき裂が、伝ばし破断に達するまでの過程を観察した結果、つぎのことが明らかにされた。

1. 軟鋼焼なまし材の回転曲げ疲れでは、中および低応力疲れにおいて、すべり線とは別にしわ状凹凸が発生する。これは起伏をなした幅広いすべり帯らしく、extrusion, intrusionと同様、疲れ変形特有のものと思われる。

2. 疲れき裂破面縁線の形状は、き裂が一点から伝ばする場合は円弧状から逆向き弓状へと規則的に変化するが、多点から発生する場合はランダムである。したがってき裂伝ばの解析のためにき裂深さを用いて整理することは一般性にとほしいものと思われる。これに対し、所定サイクル中に生じたき裂破面の面積を用いると、き裂発生点数のいかににかかわらずいずれの場合にもよく適合する形に整理される。

3. マクロ疲れき裂の伝ばは二つの段階に分けられ、き裂伝ばの大部分は

$$\Sigma a/A = i e^{c \cdot n/N_i}$$

$\Sigma a/A$ : き裂破面面積比

$n/N_i$ : 応力繰返し数比

$i, c$ : 材料定数

なる形で進行し、ついで急進的伝ばに移行する。急進的伝ばは切欠き材のほうが平滑材より遅れて起こる。また、き裂伝ばは応力振幅に依存し、応力が大きいほどき裂は早期に発生し疲れ寿命の過半を費やして伝ばする。

以上実験事実を現象論的に述べたが、理論的な検討を行なうにはさらに豊富なデータの集積が必要であり、今後の研究にまたねばならない。

終わりに、本研究に対し懇切なご指導を賜った熊本大学工学部立川逸郎教授に衷心より感謝する。

## 文

- (1) 石橋 正, 金属の疲労と破壊の防止, 改版, (昭42) 養賢堂
- (2) 日本金属学会強度委員会編, 金属材料の強度と破壊, (昭39) 丸善
- (3) 横堀武夫, 材料強度学, (昭40) 岩波書店
- (4) 日本材料学会編, 金属の疲労, (昭39) 丸善
- (5) 河本 実, 金属の疲労, (昭37) 朝倉書店
- (6) 横堀武夫, 機械学会誌 69-585, (昭42-9)
- (7) 安藤善司・ほか2名, 機械学会論文集, 23-135, (昭32-11) 847
- (8) 清水真佐男・ほか3名, 機械学会論文集, 30-215 (昭39-7) 780
- (9) 星野次郎・新井淳一, 機械学会論文集, 25-155 (昭34-7) 528
- (10) 星野次郎, 機械学会論文集, 26-164, (昭35-4) 568
- (11) 星野次郎・新井淳一, 機械学会論文集, 27-173 (昭36-11) 25

## 献

- (12) 星野次郎, 機械学会論文集, 27-173, (昭36-1) 37
- (13) 星野次郎, 機械学会論文集, 27-182, (昭36-10) 1573
- (14) 立川逸郎・小田 明, 熊本大学工学部研究報告, 14-3, (昭41-2)
- (15) W. A. Wood, Fracture, John Wiley & Sons, N. Y (1959) 412.
- (16) W.A. Wood, S.Mck. Ccusland and K.R.Sargant, ACTA Metallurgica vol. 11 (7-1963), 643.
- (17) R.P. Wei and A.J. Baker, Phil. Mag., vol. 12. No. 119 (11-1965), 1005.
- (18) N.E. Frost and D.S. Dugdale, J. Mech. Phys. Solids, 6 (1958) 92.
- (19) W. Weibull, ACTA Metallurgica, vol. 11 (7-1963) 745.
- (20) J. A. Penett, Proc. ASTM, 46 (1946), 693.

### 3 端子薄膜抵抗の等価抵抗近似計算法

辻 一 夫

<昭和44年9月30日受理>

#### Approximate calculation of equivalent resistance for the thin film resistance with three tabs

**Summary** Recently the papers prevailing the utility of the thin film resistance, have been presented. When three tabs are placed on the encircle of the thin film, the equivalent resistance between two tabs of them can not be calculated analytically, except for the case of some geometrical symmetrisities. In this paper the author presents an approximation method for the calculation of this equivalent resistance. This method enables the calculation of this resistance for any unsymmetrical position of tabs, and when the tabs are placed, satisfying some symmetrisity, this method gives the precise results as the previously presented analytical calculation.

Kazuo Tsuji

#### 1. ま え が き

最近安定した薄膜抵抗が得られるようになり、これを用いた減衰器やD-A変換器の設計法がR, J. Dow, S, C. Lee 氏等により発表されているがまだ不十分である<sup>(1),(2)</sup>。R, J. Dow 氏は矩形薄膜周辺の任意の2電極間の抵抗を計算するとき、その他の電極を省略して計算しているためその他の電極の薄膜周辺に占める割合が増大してくるとかなり大きな誤差を生じる。S, C. Lee 氏は中心軸に関し左右対称な電極をもつ薄膜に対してパートレットの二等分定理を用いて残りの電極（この場合1個）を省略することなく任意2電極間の等価抵抗を厳密に求めている。しかしこのように左右対称な構造の薄膜抵抗を減衰器として用いる場合、入出力端のインピーダンスレベルが等しい場合はS, C. Lee 氏の方法で充分であるが、入出力レベルが異なる場合は中心軸に関し左右半平面の面積抵抗を変えて、拡張された2等分定理を用いて計算する必要がある。このように左右半平面の面積抵抗を変えることは抵抗膜製作の点から好ましくない。

筆者は矩形薄膜周辺に3電極を配置した場合、この薄膜抵抗と等価なTまたはπ回路の抵抗を近似的に求める方法を検討した結果実用上十分な近似計算法であることがわかった。

#### 2. 等価抵抗の近似計算法

第1図(a)は矩形薄膜抵抗の周辺に3電極  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  を配置したもので(b), (c)はその等価回路である。以下の抵抗計算に当たって次の仮定をする。

(i) 薄膜抵抗は均質で一樣な厚みを有し面積抵抗は  $1[\Omega/\text{sq}]$ 。

(ii) 各電極は完全導体とする。

仮定(i)より以下求める抵抗は幾何抵抗である。第1図(b)の  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  を求めたい場合は、電極  $t_1-t_2$ ,  $t_2-t_3$ ,  $t_3-t_1$  間の開放駆動点インピーダンス  $R_{1-2}$ ,  $R_{2-3}$ ,  $R_{3-1}$  がわかれば

$$\begin{aligned} R_1 &= (R_{1-2} + R_{3-1} - R_{2-3}) \\ R_2 &= (R_{1-2} + R_{2-3} - R_{3-1}) \\ R_3 &= (R_{2-3} + R_{3-1} - R_{1-2}) \end{aligned} \quad (1)$$

として求まり、又第1図(c)の  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{31}$  は(b)のY-A変換により求めてもよいが各端子間の短絡駆動点アドミタンスがわかれば(1)式と全く同じ形で求められる。

##### 2-1. 開放駆動点インピーダンス

たとえば第1図(a)のような構造の薄膜抵抗の電極  $t_1$ ,  $t_2$  間の開放駆動点インピーダンス  $R_{1-2}$  を求めることについて考える。 $R_{1-2}$  は  $t_1$ ,  $t_2$  間に単位電流を流したとき  $t_1$ ,  $t_2$  間に現れる電圧であるが、第1図

(a)の形のまゝでは電流分布は簡単に求められず、したがって  $t_1, t_2$  間の電圧はわからない。ところで等角写像によって第1図(a)の図形Aを別の領域のもっと考え安い図形Bに写した場合、流線、等電位線の直交性はそのまま保存され、図形A内の流線と等電位線は図形B内の流線と等電位線に1対1に対応するので、第1図(a)を別の領域の図形Bで考えても開放駆動点インピーダンスは変わらない。

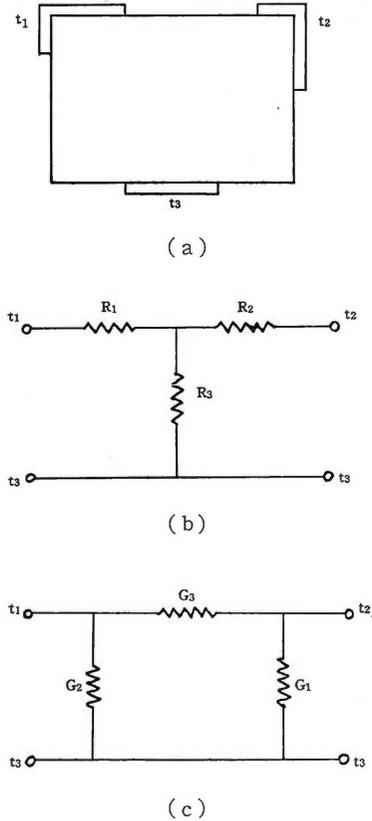


図1 3端子薄膜抵抗とその等価回路

さて、第2図(a)に示すような矩形薄膜OABCの第2図(b)への写像は、 $z$ 平面の矩形薄膜周辺の各電極の端点の座標を  $z_i$  とし、 $m = K/l = K'/l'$  (ここで  $K, K'$  はそれぞれ母数  $k$  及び  $k' = (1 - k^2)^{1/2}$  に対する第1種完全楕円積分) とすれば

$$u = sn^2(mz, k) \tag{2}$$

により  $z$  平面の矩形内部は  $u$  平面の上半平面に写像され薄膜周辺の電極の端点  $z_i$  は  $u$  平面の実軸上の点  $\alpha_i$  に対応する。ここで  $\alpha_i$  は

$$\alpha_i = sn^2(mz_i, k), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \tag{3}$$

次に  $\alpha_1, \alpha_2$  及び  $\alpha_4$  が  $v$  平面上でそれぞれ 0, 1 及び  $\infty$  に対応するような変換は

$$v = \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \frac{u - \alpha_1}{\alpha_4 - u} \tag{4}$$

であるから  $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6$  に対応する  $v$  平面上の位置は上式に  $u = \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6$  を代入すれば直ちに求まり、これをそれぞれ  $\beta_3 (=1/\lambda^2), \beta_5, \beta_6$  とおけば

$$v = sn^2(w, \lambda) \tag{5}$$

により  $v$  平面の上半平面は  $w$  平面の矩形内部に写像される。 $\beta_5, \beta_6$  に対応する点を  $\tau_5, \tau_6$  とすれば、この値は上式に  $\beta_5, \beta_6$  を代入することにより求められる。

以上の変換により第1図(a)のような任意な3電極

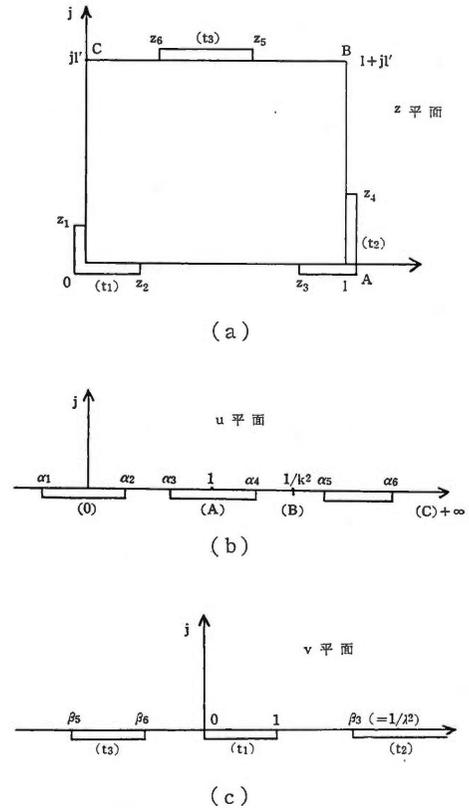


図2 3端子薄膜抵抗第1種標準形への等角写像

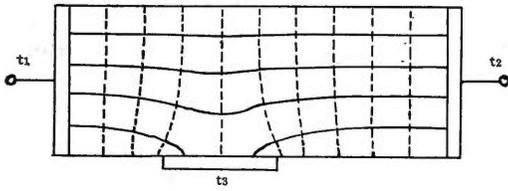


図 3 電流分布と等電位線の大略

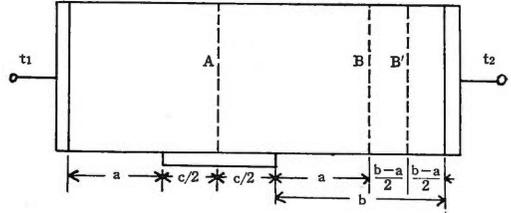
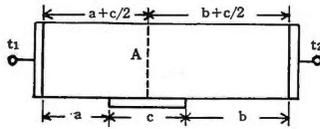
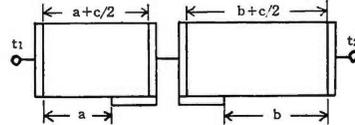


図 4 完全導体挿入位置 A, B, B'

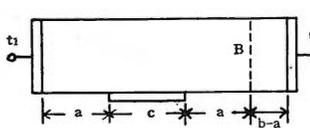


(a)

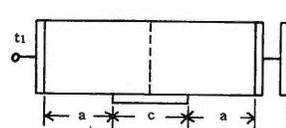


(b)

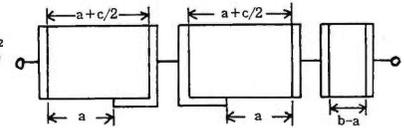
図 5 A線に沿って完全導体を挿入して分解する方法



(a)

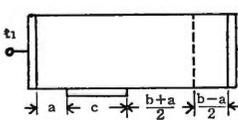


(b)

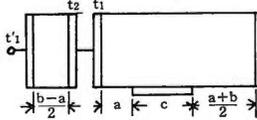


(c)

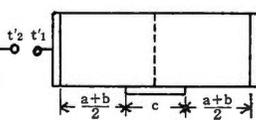
図 6 B線に沿って完全導体を挿入して分解する方法



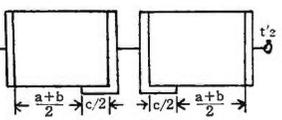
(a)



(b)



(c)



(d)

図 7 B'線に沿って完全導体を挿入して分解する方法

配置の矩形薄膜（必ずしも矩形でなくともよい）は第2図(d)のような電極配置の矩形薄膜について考えればよいことになるので、これを以下3端子薄膜抵抗第1種標準形と呼ぶことにする。

第1種標準形において  $|r_5 - r_6| \ll L'$  の場合は

$$R_{1-2} \cong L'/L \tag{6}$$

ここで  $L, L'$  は母数  $\lambda$ , 補母数  $\lambda' = (1 - \lambda^2)^{1/2}$  に対する第1種完全楕円積分で電極  $t_1, t_2$  の巾と  $t'_1, t'_2$  間の長さを表す。このように  $t_3$  の影響が無視できる場合は Dow 氏の方法に相当するが、無視できない場合は次のように考えればよい。第3図は電極  $t_1, t_2$  間に電流を流した場合の流線（実線）と等電位線（点線）の大略である。ところで等電位線に沿って完全導体を挿入しても電位分布は乱れず、したがって  $R_{1-2}$  は変わらない。これより第5図に示すように  $t_1, t_2$

電極に平行な A, B 又は B' のような  $t_1, t_2$  に平行な線に沿って完全導体を挿入しても A, B, B' はほぼ等電位線と一致すると考えられるのでほとんど電位分布は乱されず、したがって  $R_{1-2}$  はほとんど変わらない。このように完全導体を挿入した場合  $t_1, t_2$  間の抵抗を  $R'_{1-2}$  とすれば誤差  $\epsilon_{12}$  は

$$\epsilon_{12} = R'_{1-2} - R_{1-2}$$

である。電極  $t_3$  が  $t_1$  と  $t_2$  の中間にある場合は対称性により線分 A と等電位線は一致するので完全導体の導入により電位分布は乱されることがなく誤差は零となる。電極  $t_3$  が一方へ近づくにしたがって完全導体の挿入により電位分布の乱れは大きくなり電極  $t_3$  が  $t_1$  又は  $t_2$  の一方に接触したとき最大となり誤差も最大となる。以下 A, B 又は B' に完全導体を挿入して薄膜を分解する方法を述べ、それぞれの場合の最大誤差

の式を導く。

第5, 6, 7図はそれぞれA, B, B'に沿って完全導体を挿入し, 第1種標準形を分解する過程を示す図である。たとえば第7図は, (a)もし  $b > a$  なら  $t_2$  の左方  $(b-a)/2$  の位置 B' に沿って完全導体を挿入し, (b)これより右側を切断し  $t_1$  の左方に接続して, (c)  $t_1$  を取除くと左右対称形となるので, (d)  $t_3$  の中央より垂直に完全導体を挿入し切断する。第6図と比較すれば, B' はBより  $t_2$  の近いので B' に完全導体を挿入した方が電位分布の乱れは小さく, したがって  $R_{1-2}$  の減少程度はBに完全導体を挿入した場合より少い。更に第7図(c)のように  $t_1, t_2$  を接触させ, これを取除くと  $R_{1-2}$  は少し増大し前の減少分を補償するので第7図の分解法が第6図の方法より好ましい。第7図の方法は結局  $t_3$  を中央に移動させたことに他ならない。このようにして  $R_{1-2}$  の値を殆んど変えることなく3個の電極を2個に減少させ  $R_{1-2}$  の値を求めることができる。

最大誤差の評価 さて第1種標準形において電極  $t_3$  が一方へ接触した場合, 各部の座標を第8図のように定める。ところでこの図形は元の図形の  $K/l=K'/l'=n$  倍されているが  $t_1, t_2$  間の抵抗に変わらない。というのは電流密度は元の  $1/n$  となりその流線に沿う積分距離は  $n$  倍となるからである。(2), (3), (4) 式により

$$1/\lambda^2 = dn^2 (\alpha K', k')/k^2 \quad (9)$$

であるから  $L, L'$  は簡単に求めることができる。ここで  $L, L'$  はそれぞれ母数  $\lambda$ , 補母数  $\lambda' = (1-\lambda^2)^{1/2}$  の第1種完全楕円積分である。さて前にも述べたように  $t_3$  が一方へ寄るに従って完全導体の挿入による電位分布の乱れは大きく,  $R_{1-2}$  の値も大きく変化する。それ故  $t_3$  が一方の電極  $t_1$ , 又は  $t_2$  に接触している場合上記分解法を適用すると最大誤差を生じる。したがって第5図の分解法を適用した場合の最大誤差  $\epsilon_{12A}$  は

$$\epsilon_{12A} = \frac{L'}{L} - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{K'}{K} \quad (11)$$

となる。第6図の分解法を適用した場合の最大誤差は

$$\epsilon_{12B} = \frac{L'}{L} - (1-\alpha) \frac{K'}{K} \quad (14)$$

となる。第7図の場合も上記と同様な評価ができるが以下述べるような評価も可能である。すなわち  $t_3$  の巾が大きくなるに従って B' と等電位線のずれは大きくなりこの位置に完全導体を挿入すれば  $R_{1-2}$  の値は大きく変化するので,  $t_3$  の巾  $C \rightarrow \infty, K' = 1$  とし

$$K = \frac{1}{2} \{ \cosh(\pi z) + 1 \} \quad (12)$$

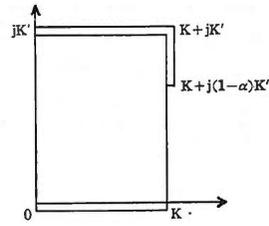


図8 電極  $t_3$  が一方へ接触した場合

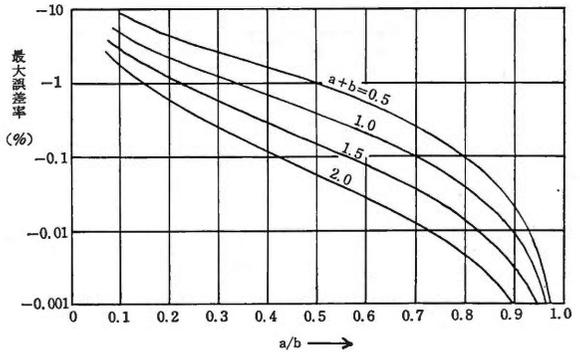


図9 図7に示す分解法を適用した場合の最大誤差の評価

なる変換により

$$\begin{aligned} 1/\lambda_a^2 &= \frac{1}{2} \{ \cosh(\pi a) + 1 \} \\ 1/\lambda_b^2 &= \frac{1}{2} \{ \cosh(\pi b) + 1 \} \\ 1/\lambda_d^2 &= \frac{1}{2} \{ \cosh(\pi d) + 1 \}, \quad d = \frac{a+b}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

として  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_d$  を求め, それに対応する第1種完全楕円積分の値を  $L_a, L_b, L_d$ , 又  $\lambda'_a, \lambda'_b, \lambda'_d$  なる補母数に対するそれを  $L'_a, L'_b, L'_d$  とすれば, この場合の最大誤差  $\epsilon_{12B'}$  は

$$\epsilon_{12B'} = 2L'_d/L_d - (L'_a/L_a + L'_b/L_b) \quad (14)$$

となる。第9図は(14)式を用いて第7図の分解法を適用した場合の最大誤差を  $a+b$  を助変数として計算したものである。  $a/b$  が小さいと誤差はかなり増大するが, 實際上  $t_3$  の巾  $c$  が非常に大きい場合は別として, そうでない場合は(10), (11)式に準じた評価法を適用すれば最大誤差は更に小さい。

### 2-2 短絡駆動点アドミタンス

第1図(a)を前と同様な方法で第10図のように写像しこれを3端子薄膜抵抗第2種標準形と呼ぶことにする。第12図は電極  $t_1, t_3$  を短絡し  $t_1, t_3$  と  $t_2$  間に電流を流した場合の電流分布の大略である。第1種標

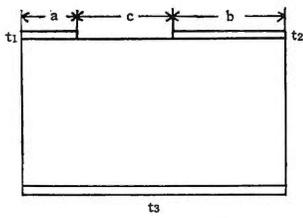


図10 3端子薄膜抵抗第2種標準型

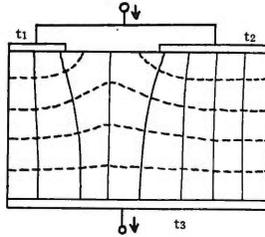


図11 流線及び等電位線

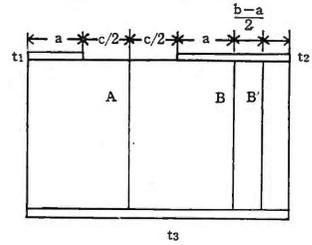


図12 図5に双対な切断位置

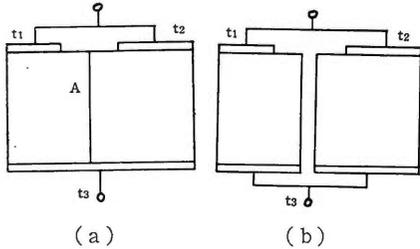


図13 A線に沿って切断して分解する方法

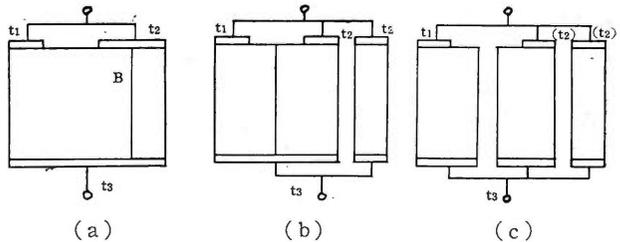


図14 B線に沿って切断して分解する方法

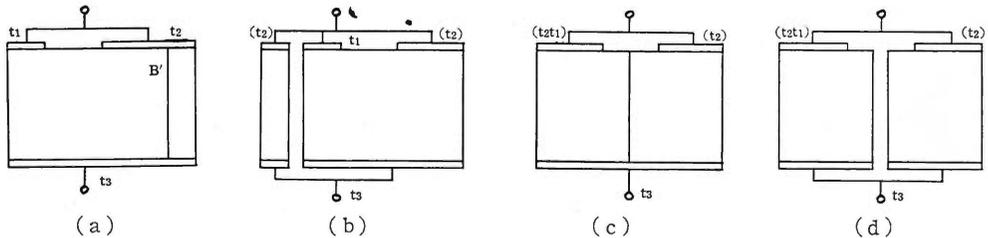


図15 B'線に沿って切断し分解する方法

準形と第2種標準形を比較すればすぐわかるように電極のついている場所とついていない場所が入換っている。又第4図と第11図をみればわかるように流線と等電位線が入換っている。そこで短絡駆動点アドミタンスを求めるには、前記の開放駆動点インピーダンスを求めたのと双対な分解法を考えればよいことになる。すなわち流線に沿って切断してもGの値は変わらないから、第13, 14, 15図のような分解をしてもGの値はほとんど変化しない。このようにして求めた短絡駆動点アドミタンスの値をG'とすれば誤差εは

$$\epsilon = G' - G \tag{15}$$

である。誤差の最大値は前の場合と同様に考えればよい。たとえばG<sub>1</sub> + G<sub>2</sub>を求める場合t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>の巾が等しいとき(対称形)又はt<sub>1</sub>とt<sub>2</sub>の間の長さCが0と考えられる場合は誤差は零となり、最大誤差はt<sub>1</sub>又はt<sub>2</sub>のどちらか一方の巾が0になったとき生じる。第14, 15図の場合はt<sub>1</sub>とt<sub>2</sub>の間の長さC→∞の場合を考え最大誤差を評価することができる。

### 3. むすび

以上の方法により3電極を有する薄膜抵抗の近似等価抵抗が得られる。この等価回路は3変数R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub>又はG<sub>1</sub>, G<sub>2</sub>, G<sub>3</sub>によって表わされるので(1)式にも示すように例えばR<sub>1-2</sub>, R<sub>2-3</sub>, R<sub>3-1</sub>を求めるため3回標準形に変換する必要があるように思われるが、実際には1回の変換で2変数が決定できるので2回の変換でよい。a≠bの場合は第1種標準形では、たとえば第4図においてt<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>を短絡しt<sub>3</sub>との間に電流を流した場合A線に沿って切断しても電流分布は殆んど乱れることなく新しい分解が可能である。このようにすればR<sub>1</sub> + 2R<sub>3</sub>とR<sub>2</sub> + 2R<sub>3</sub>を求めることができる。第2種標準形の場合は上述の双対な方法を考えればよい。以上の近似計算で実用上充分であることがわかった。薄膜抵抗を用いた減衰器の設計資料の作成については後日別の機会に発表したいと考える。

筆をおくにあたり、有益な助言を賜った熊本大学工学部松山公一先生に深く謝意を表します。

#### 4. 参 考 文 献

- (1) R. J. Dow : IEEE Transaction on Component Parts, 147 (1964)
- (2) S. C. Lee : IEEE PMP-4, 41 (1968)

# マイクロ波におけるフェライトの特性

小 沢 賢 治

<昭和44年9月25日受理>

## Character of the Ferrite in the Microwave

### Abstract

If the complex magnetic permeabilities of the ferrite,  $\mu_r'$  and  $\mu_r''$ , satisfy the conditions,  $\mu_r'' \gg \mu_r'$  and  $\mu_r'' \propto \frac{1}{f}$ , this ferrite can be used as an absorbent of the electric magnetic wave.

In the ferrites which the present writer made under some sorts of condition, there were the ferrites which tend to satisfy the conditions,  $\mu_r'' \gg \mu_r'$  and  $\mu_r'' \propto \frac{1}{f}$ . Therefore, the present writer reports this research.

Kenzi Ozawa

### 1. ま え が き

矩形導波管にフェライトを図1のように挿入し、その後面を導体板で短絡した場合の正規化入力インピーダンス  $Z$  は、式(1)で示される。

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \tanh \left( j2\pi \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \frac{d}{\lambda} \right) \quad (1)$$

式(1)において、

$$\mu_r'' \gg \mu_r' \text{ and } \mu_r'' \propto \frac{1}{f} \quad (2)$$

が成立すれば、その周波数の範囲において、整合がとれる。ただし、式(2)において、 $\mu_r'$  は複素比透磁率の実数項、また  $\mu_r''$  は虚数項である。

式(2)を満すフェライトを、マイクロ波帯で使用すれば、従来のものに比して非常に小型の電波吸収体となり得る<sup>(1)</sup>。

そこで、筆者は、条件の相異なる数種のフェライトを作製し、その複素比透磁率  $\mu_r'$  及び  $\mu_r''$  を測定したところ、式(2)の傾向を示すものが得られたので、報告する。

### 2. 試料の製法

BaCO<sub>3</sub>, ZnO, 2CoCO<sub>3</sub>·3Co(OH)<sub>2</sub>, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> を秤量し表1の組成の混合物をつくる。

この混合物をボールミルで混合粉碎したものを、1.2 [ton/cm<sup>2</sup>] の圧力で成型し、これを大気圧の空气中で、1300 [°C]、1時間の仮焼をした。

つぎに、上記の仮焼した試料を、鉄製乳鉢で粗粉碎し、これを、再び、ボールミルで混合粉碎し、次に圧力1.2 [ton/cm<sup>2</sup>] で成型し、これを空气中大気圧で、1300 [°C] 1時間の仮焼を行う。以上の順で、2回の仮焼をした試料を、再び、粉碎混合し、次に本焼を行う。

本焼の温度は、1150 [°C]、および1250 [°C]、1350 [°C] の3種とし、加熱時間は、いずれも15分間で、雰囲気は空気である。

以上の方法によって作った試料に、表1のように記号をつける。

### 3. 測定方法

上記18種類の試料を、矩形導波管の管壁に密着するように、グラインダー等で整形し、これを図2に示す測定回路に挿入する。

図2の回路において、短絡正規化入力インピーダンス  $Z_s$  および、開放正規化入力インピーダンス  $Z_0$  を測定した。

次に、 $Z_s$  および  $Z_0$  を、式(3)に代入することにより、複素透磁率  $\mu_r$  を計算した。

$$\mu_r = j \frac{1}{\beta_0 d} \sqrt{Z_s \cdot Z_0} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{Z_s}{Z_0}} \quad (3)$$

ただし

$\beta_0$  : 空気の位相定数

$d$  : 試料の厚さ

$Z_0$ : 試料後面を開放したときの, 正規化入力カイ  
ンピーダンス

$Z_s$ : 試料後面を短絡したときの, 正規化入力カイ  
ンピーダンス

### 4. 測定結果

図3より, 焼成温度が高いと, 組成の変化に対する  $\mu'_r$  の値の変化は小さい。

また,  $\mu''_r$  については, 図4から, 焼成温度が高いと, 組成の変化による  $\mu''_r$  の変化は大きい。

同一組成で焼成温度の異なる試料については, 図5および図6より, 焼成温度が高くなるにつれて,  $\mu'_r$  の値は小さくなり,  $\mu''_r$  の値は逆に, 焼成温度が高くなるにつれて大きくなっていくことがわかる。

図5および図6は, 組成“2”についての結果であるが, 同様の結果は, 組成“5”についても得られた。他の組成の試料については, 組成“2”および“5”程度の傾向は得られなかった。

表 1. 各試料の製作条件

組 成	温度 [°C]	1150			1250			1350		
1	Ba <sub>(3)</sub> Co <sub>(2)</sub> Fe <sub>(24)</sub> O <sub>41</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>						
2	Ba <sub>(3)</sub> Co <sub>(1.65)</sub> Zn <sub>(0.85)</sub> Fe <sub>(24)</sub> O <sub>41</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>2</sub>	C <sub>2</sub>						
3	Ba <sub>(3)</sub> Co <sub>(1.0)</sub> Zn <sub>(1.0)</sub> Fe <sub>(24)</sub> O <sub>41</sub>	A <sub>3</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>3</sub>						
4	Ba <sub>(3)</sub> Co <sub>(0.5)</sub> Zn <sub>(1.5)</sub> Fe <sub>(24)</sub> O <sub>41</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>4</sub>	C <sub>4</sub>						
5	Ba <sub>(3)</sub> Co <sub>(0.1)</sub> Zn <sub>(1.9)</sub> Fe <sub>(24)</sub> O <sub>41</sub>	A <sub>5</sub>	B <sub>5</sub>	C <sub>5</sub>						
6	Ba <sub>(3)</sub> Zn <sub>(2.0)</sub> Fe <sub>(24)</sub> O <sub>41</sub>	A <sub>6</sub>	B <sub>6</sub>	C <sub>6</sub>						

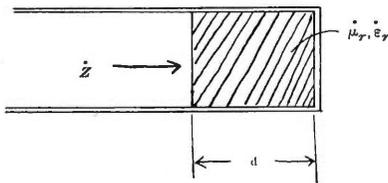


図 1

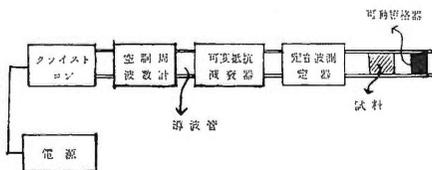


図 2 定在波比法による  $\mu_r$  の測定回路

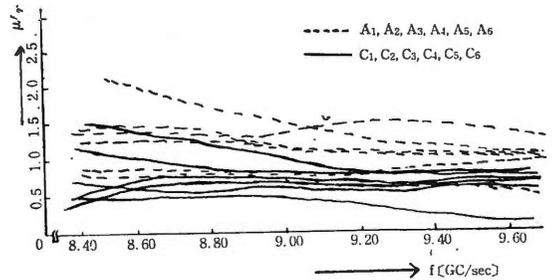


図 3

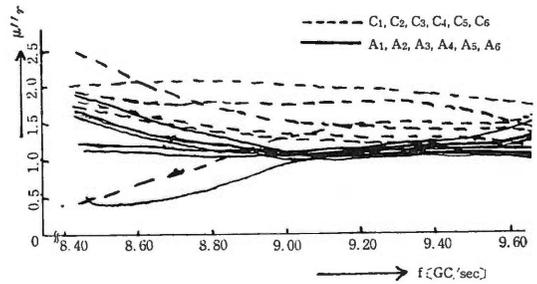


図 4

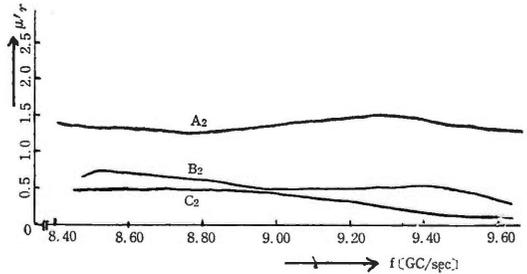


図 5

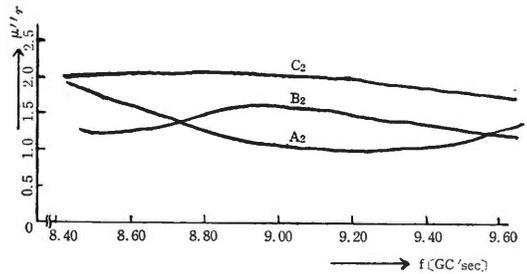


図 6

### 5. まとめ

式(2)を比較的良好に満足するものは, 組成“2”および“5”で, 本焼温度 1350 [°C] である。これらの組成の近くで, 更に本焼温度の高い場合について検討すれば, マイクロ波帯における広帯域電波吸収体とし

て一層満足なものに近づくであろう。ひきつづき、検討の予定である。  
終わりに、本研究を終始御指導くださった熊本大学

相田貞蔵教授、および試料作製にあたり機器をお貸しくださった本校相良睦男教授小田明助教授に対して、ここに感謝の意を表します。

---

## 6. 文 献

- (1) 末武, 仲野, 武田: “磁気形抵抗皮膜吸収壁” 信電会, マイクロ波研資 (昭42—01)。



# タール系食用色素の分析的研究 (第1報)

## 薄層クロマトグラフィーによる分析 (1)

清水正夫\* 佐々木英人\*\*

<昭和44年10月18日受付>

### Analytical Studies on the Water-soluble Coal-tar Dyes for Food

#### I Of Analysis by Thin-layer Chromatography (1)

The separation by thin-layer chromatography was studied on 17 water-soluble coal-tar dyes, of which 14 dyes were permitted and 3 are non-legal in Japan. The compositions of thin-layer and of the developing solvent giving the good results were obtained. Moreover, the preliminary experiments in the quantitation of dyes on thin-layer chromatograms using densitometer were carried.

Masao Simizu, Hideto Sasaki

#### まえがき

現在食品添加物として食品衛生法第6条で規定されているものは約350種である。この添加物の定義は「食品の製造過程において、または食品の加工もしくは保存の目的で食品に添加、混和、浸潤その他の方法によって使用するものであり、その効果から着色料、保存料など24種のものがある。この中に着色料としてタール系色素14種、アルミニウムレーキ9種、その他の着色料として9種が認められている。近年国内でも世界各国でも保健衛生上の点から飲食料の人工着色について再検討の動きが活発になっている。それには毒性の検討はもちろん肝要であるが、食品中の色素の同定、定量が先決条件である。このような点から著者らはタール系食用色素の分析研究を種々の方法を用いて開始し、まず薄層クロマトグラフによって行なった予備的分析実験につき報告する。

#### 1 試薬・試薬および装置

##### (1) 試料

使用色素は Table 1 に示す17種で、それぞれ0.05%水溶液の0.002mlをスポットした。また混合物溶液は各系について0.05%の各色素の等容混合物を用

い、モノアゾ系は4種混合物なので0.006ml、キサンテン系、トリフェニルメタン系およびインジゴイドは各0.010ml、不許可色素混合物は0.006mlをスポットした。

##### (2) 試薬

吸着剤: Kieselgel G (E. Merck), EASTMAN "Chromagram" Sheet Type K301R2 (Eastman Kodack) Aluminiumoxyd G (E. Merck), Kieselguhr G.

溶剤: 酢酸、濃アンモニア水、酢酸エチル、酢酸ナトリウム、n-ブタノール、エタノール、メタノール、ピリジン (いずれも特級)

##### (3) 装置

展開槽: 縦240×横70 (上面90) ×230 (H) mm, 角形スリ蓋付チャンパー。(三田村製)

光電濃度計: デンシトロール DMU-2型, 透過式。(東洋科学製)

#### 2 実験方法

使用した色素は Table 1, 2 に示す17種である。薄層3については、0.5%酢酸ナトリウム溶液中に溶かした0.05%色素溶液を、他の4種の薄層の場合はすべ

\* 本校教授 \*\* 前本校助教授 (現) 鳥取大学 (工) 助教授

て0.05%の色素水溶液を用いた。展開溶媒としては、a) 酢酸エチル, メタノール, 濃アンモニア水 (5:2:1), b) メタノール, 濃アンモニア水 (9:1), c) ピリジン, 濃アンモニア水, 水 (3:10:10), d) n-ブタノール, エタノール, N/2 アンモニア水 (6:2:3), e) n-ブタノール, エタノール, 水, 濃アンモニア水 (2:1:1:0.4) 溶液に2%の酢酸ナトリウムを添加溶解したものについて、それぞれ予備実験し、f) が最も良好な結果を得たので、本実験はすべてこの溶媒を用いて行なった。

薄層の作成には三田村理研製のTLC-SDの装置を用いた。プレートは200×200mmおよび200×100mmのアブリガラスプレートを使用した。薄層はすべて200μの厚みに塗布した。薄層の調整は、薄層1は市販のシリカゲルをすでに塗布したものをそのまま用いた。薄層2はKieselgel G 30μを乳鉢でかきまぜながら40mlの純水ですばやく練りあわせ、約20mlの純水を追加し、イワキ製万能シェーカーV-S型で30~40秒ふりまぜてできたかゆ状物をプレート上に塗布し、一夜

放置後105℃で30分間加熱して活性化した。薄層3は薄層2の純水の代りに1%酢酸ナトリウム水溶液を用いた。薄層4はAluminiumoxd G 30gに純水60mlを加えて同様に30~40秒ふりまぜ後、プレートに塗布し、一夜放置後130℃で30分間加熱した。薄層5はKieselguhr G 30gに60mlの純水を加えて同様な処理、塗布を行ない、100℃で30分間加熱した。また薄層1のシートも使用前には100℃で30分間加熱して活性化した。

以上のよっにして用意したプレート上にスポットガイドを用いてTable 1, 2にあげた色素水溶液(薄層3での色素は酢酸ナトリウムの0.5%水溶液に溶解した)0.002ml(0.05%溶液であるから色素として1μg)をプレート的一端から2.5cmの原線上にスポットした。各色素のスポット間の距離は1cmとした。混合物溶液では1.5~2cmの間隔とした。展開槽はやや上方に向けたチャンパーで、プレートはあらかじめ溶媒を入れたガラス槽に入れ、それぞれの溶媒蒸気中に2時間さらした後、上昇展開を行なった。溶媒が試料をスポ

Table 1 Water-soluble Dyes

No.	Class	Dye	Food Color No.	C. I.*4 (1956)	Purity (%)	pH*5
1	Monoazo	Tartrazine	Yellow No. 4*1	19140	99.5	6.39
2		Amaranth	Red No. 2*1	16185	99	6.10
3		New Coccine	Red No. 102*1	16255	94.5	5.78
4		Sunset Yellow FCF	Yellow No. 5*1	15985	99.5	6.28
5	Xanthene	Phloxine	Red No. 104*1	45410	95.5	5.00
6		Erythrosine	Red No. 3*1	45430	95	6.65
7		Acid Red	Red No. 106*1	45100	97.5	6.79
8		Eosine	Red No. 103*1	45380	96	6.30
9		Rose Bengal	Red No. 105*1	45440	95	6.20
10	Triphenyl-methane	Acid Violet 6B	Violet No. 1*2	42640		4.65
11		Brilliant Blue FCF	Blue No. 1*1	42090	96.5	6.37
12		Light Green SF Yellowish	Green No. 2*2	42095		5.10
13		Fast Green FCF	Green No. 3*2	42053		6.10
14	Indigoid	Indigo Carmine	Blue No. 2*1	73015	99.5	4.48
15	Triphenyl-methane	Malachite Green	Non-legal*3	42000		3.20
16	Diphenyl-methane	Auramine	// *3	41000		5.22
17	Xanthene	Rhodamine B	// *3	45170		3.17

\*1 国立衛生試験所製色素標準品

\*2 東京化成製衛生試験所検査合格品

\*3 和光純薬製

\*4 Color Index Number

\*5 pH of Sample Solution

Table 2 Permissive Dyes for Food in Japan

法定名	一般名	化学構造式	他の許可国
○食用赤色2号	Amaranth		Ag, Al, Au, Be, Bz, Ca, Ch, Co, Cu, Dn, E·E, Ar, Fn, Fr, I, At, Mx, Ne, No, Pe, Pl, Pr, Af, Sp, Sw, St, Tu, U, A, V, Y, N
○食用赤色3号	Erythrosine		Ag, Al, Au, Be, Bz, Ca, Co, Cu, Dn, E·E, Ar, Fn, Fr, Ge, I, At, Mx, Ne, No, Pe, N
食用赤色102号	New Coccine		Al, Au, Be, Dn, E·E, Ar, Fn, Fr, I, At, Mx, Ne, No, Pl, Sp, Sw, Tu, U, Y, N
食用赤色103号	Eosine		Co, U
食用赤色104号	Phloxine		U
食用赤色105号	Rose Bengal		Ag, Al, Co, U
食用赤色106号	Acid Red		—
○食用黄色4号	Tartrazine		Ag, Co を除く全部
○食用黄色5号	Sunset Yellow FCF		Co, Pr を除く全部
○食用緑色2号	Light Green SF Yellowish		Ca, Cu, Pe, U, A
○食用緑色3号	Fast Green FCF		Ca, Cu, No, Pe, At, Sw, A
○食用青色1号	Brilliant Blue FCF		Al, Ca, Co, Cu, I, Pe, At, Tu, A
○食用青色2号	Indigo Carmine		Co を除く全部
○食用紫色1号	Acid Violet 68		Ag, Bz, Co, Cu, Pe, Af, Tu, A

注：○印はアルミニウムレーキのあるもの

Ag: アルゼンチン, Al: オーストラリア, Be: ベルギー, Bz: ブラジル, Ca: カナダ, Ch: チリ, Co: コロンビア, Cu: キューバ, Da: デンマーク, E·E: E·E·C, Ar: アラブ連合, Fn: フィンランド, Fr: フランス, Ge: 西ドイツ, I: イタリア, Mx: メキシコ, Ne: オランダ, No: ノルウェー, Pe: ペルー, Pl: ポーランド, Pr: ポルトガル, Af: 南アフリカ, Sp: スペイン, Sw: スウェーデン, St: スイス, Tu: トルコ, E: イギリス, U: ウルガイ, V: ベネゼーラ, Y: ユーゴスラビア, N: ニュージーランド, At: オーストリア

ットした原線上方約10cmに達したとき展開をやめ、展開槽から取り出し風乾して Rf 値を測定した。そして各色素および混合物のスポットについて光电濃度計を用い測定スリット(1×10mm)、フィルター(428~630 m $\mu$ の各種)、送り速度は30mm/minで走査し、吸光度(0~0.1)を測定して濃度曲線および積分曲線を得た。

### 3 実験結果および考察

クロマトグラフィーの結果を Table 3, 4 に示す。30°Cで約10cm上昇するに要する展開時間は薄層1と5では約60分, 2と3では約90分, 4では約100分であった。この場合 Rf 値は薄層の作成条件, 厚みなどの諸条件で必ずしも正確な再現性のあるデータが得られないので, 予備実験でほしい最大 Rf 値を与えることが判明した赤色 105 号(ローズベンガル)を基準色素に用いた。Table 4 はこの赤色 105 号の Rf 値を 1.0 として各色素のスポットの R<sub>RD</sub> 値を算出したもので以下の論議は Table 3, 4 を並視して行なう。薄層1のスポットはシリカゲル系であるが, 同じくシリカゲル系の薄層2および3に比し大きく拡がっており, 特に混合溶液において著しくキサンテン系においてはほとんどオーバーラップしている。そして R<sub>RD</sub> 値も薄層2および3の順位と多少異なっているところが見られる。これは薄層の結着剤としてポリビニルアルコールが含まれることによるものと考えられる。

薄層5の Kieselguhr G では, Y-4 および R-2 が Rf 値 0.5~0.9 ぐらいのところへ薄く長く拡散しているほか, 他の色素はすべて溶媒前線上にあり, 分離目的には不適である。

薄層3の Aluminiumoxyd G ではシリカゲル系の薄層1~3に比して Rf 値が全般的に大なのは, 成分のアルミナの吸着力がシリカゲルより弱いことにも起因すると思われる。そしてスポットの形状は円形に近く, R-2, R-106, V-1 にややテーリングがみられる。

Kieselgel G を塗布した薄層は, 他の 1, 4, 5 の薄層に比し良好な結果を得たが, R-104, R-105 および V-1 に薄いテーリングがみられた。

Table 1 に示すように酸性色素を展開するため予備実験で検討した結果, 酸性溶媒は Rf 値に明らかな停止効果を示し, 塩基性層では Rf 値が上昇する。さらに緩衝作用によってスポットのまとまりを目的として, この実験では n-ブタノール~エタノール系に濃アンモニア, さらに酢酸ナトリウムを添加したものをを用いた。その pH は 10.45 であった。したがって薄層2のクロマトグラムを改善の目的で, 塩基性のシリカゲル

を作るため, 純水のかわりに 1.0% 酢酸ナトリウム水溶液で薄層を作成して展開を行なったところ, アルカリの作用もあずかり, 長円状の鋭敏で狭い展開スポットが得られた。そのクロマトグラムを Figure 1 に示す。Table 3 より薄層2に比して薄層3の Rf 値が全般的に低いのは薄層3の塩基性吸着層が色素溶液と反応吸着層を作ったものと考えられる。さらにモノアゾ系の Rf 値が薄層3で他の薄層より低下しているのは, Table 2 の構造式に示すように, 分子中のフェノール性水酸基が塩基性層で強く吸着されるためであろう。

分子構造と Rf 値について検討してみると, Table 2 により R-2 と R-102, R-104 と R-105 および B-1 と G-2 がそれぞれ極めて似ている。そして Table 3 および Table 4 の Rf 値および R<sub>RD</sub> 値はほとんど同じである。また R-103 が R-3 より Rf 値が小なのは前者が臭素, 後者がヨウ素化合物のため R-103 が吸着層, とくに塩基性吸着層に対する親和力が大なるためとみられる。

シリカゲル系薄層1と, 薄層2および3とを比較したとき, Table 4 の R<sub>RD</sub> 値をみるに, 薄層1では単色素溶液およびその各系の混合色素溶液から得られた R<sub>RD</sub> 値にほとんど変動がないのに対し, 他の二つは一般に混合物溶液からの値の方が大きくなっている。これは薄層1は Eastman 社製で, ポリエステルフィルム上に, シリカゲルが機械的に極めて薄く(100 $\mu$ ) 均一に塗布されているため再現性がよいものと考えられる。さらに 250 $\mu$  で塗布してあるガラススペースに比しても展開時間は 2/3 になっている。

以上の実験から薄層3が検討したもののうち, 分離の目的には最も有効であった。しかし各系間の分離については, キサンテン系では R-3 と R-104, トリフェニルメタン系では G-2 と G-3 の分離が困難なのでさらに検討を要する。

不許可塩基性色素3種は全薄層について最も早く展開され, 他の酸性色素に常に先駆していた。そして特に薄層3については, お互いが明らかに分離された。Rf 値はマラカイトグリーン, オーラミン, ローダミンBの順に小になった。

展開されたスポットを定量するためには, a) スポット面積の測定, b) スポットされた色素溶出液の比色分析があるが, a) では値の正確さに難点があるとともに薄層の厚み差, 製法差などから標準化が困難, b) では展開分離されたスポット部分を薄層とともにかきとり, 適当な溶媒で抽出して比色分析するもので, その操作の繁雑はまぬがれず, また操作中の経時変化による色素の退色進行も無視できない。そこで展

**Table 3** Approximate Rf Values of Water-Soluble Dyes

No.	Dye	Thin-layer* <sup>1</sup>								
		1		2		3		4		5
		Single <sup>*2</sup>	Mixture <sup>*3</sup>	Single	Mixture	Single	Mixture	Single	Mixture	Single & Mixture
1	Y-4	0.32	0.33	0.36	0.49	0.31	0.33	0.62	0.57	diffuse
2	R-2	0.39	0.40	0.43	0.54	0.37	0.46	0.66	0.63	"
3	R-102	0.50	0.51	0.42	0.53	0.38	0.48	0.67	0.66	front
4	Y-5	0.73	0.68	0.53	0.63	0.45	0.55	0.74	0.77	"
5	R-104	0.89	0.89	0.78	0.78	0.60	0.66	0.84	0.86	"
6	R-3	0.82	0.80	0.78	0.78	0.60	0.66	0.83	0.85	"
7	R-106	0.82	0.83	0.54	0.63	0.47	0.57	0.78	0.79	"
8	R-103	0.76	0.76	0.68	0.73	0.55	0.64	0.82	0.81	"
9	R-105	0.85	0.87	0.86	0.88	0.66	0.71	0.86	0.88	"
10	V-1	0.85	0.89	0.57	0.65	0.50	0.58	0.80	0.80	"
11	B-1	0.73	0.78	0.49	0.57	0.44	0.54	0.73	0.75	"
12	G-2	0.71	0.76	0.47	0.57	0.44	0.54	0.73	0.75	"
13	G-3	0.64	0.68	0.43	0.53	0.40	0.50	0.66	0.68	"
14	B-2	0.42	0.48	0.45	0.54	0.41	0.50	0.66	0.68	"
15	Malachite Green	0.98	0.98	0.95	0.96	0.95	0.97	0.95	0.95	"
16	Auramine	0.94	0.96	0.83	0.84	0.76	0.93	0.95	0.95	"
17	Rhodamine B	0.94	0.96	0.85	0.86	0.74	0.86	0.91	0.87	"

## \*1 Thin-layer

1. EASTMAN : CHROMAGRAM Sheet K301R2 (Silica gel)
2. E. MERCK A. G. : Kieselgel G, Slurry prepared with H<sub>2</sub>O
3. " : " , " " " 1% Na OAc aq.
4. " : Aluminumoxyd G, " " " H<sub>2</sub>O
5. " : Kieselguhr G, " " " "

## \*2 Single dye solution

- \*3 Mixture solution of dye
- No. 1~ 4, Monoazo dyes
  - No. 5~ 9, Xanthene dyes
  - No. 10~13, Triphenylmethane dyes
  - No. 14 Indigoid dye
  - No. 15~17, Nonlegal basic dyes

Table 4 Approximate  $R_{RD}$ -Values <sup>4</sup> of Water-Soluble Dyes

No.	Dye	Thin-layer* <sup>1</sup>								5 Single & Mixture
		1		2		3		4		
		* <sup>2</sup> Single	* <sup>3</sup> Mixture	Single	Mixture	Single	Mixture	Single	Mixture	
1	Y-4	0.38	0.38	0.42	0.56	0.47	0.46	0.72	0.65	diffuse
2	R-2	0.46	0.47	0.50	0.61	0.56	0.65	0.77	0.72	"
3	R-102	0.59	0.58	0.49	0.60	0.58	0.68	0.78	0.75	Front
4	Y-5	0.86	0.78	0.62	0.72	0.68	0.77	0.86	0.87	"
5	R-104	1.02	1.01	0.91	0.89	0.91	0.93	0.98	0.98	"
6	R-3	0.97	0.92	0.91	0.89	0.91	0.93	0.96	0.97	"
7	R-106	0.97	0.95	0.63	0.72	0.71	0.80	0.91	0.90	"
8	R-103	0.89	0.88	0.79	0.83	0.83	0.90	0.95	0.92	"
9	R-105	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	"
10	V-1	1.00	1.02	0.66	0.74	0.76	0.82	0.93	0.91	"
11	B-1	0.86	0.90	0.57	0.65	0.67	0.76	0.85	0.85	"
12	G-2	0.83	0.87	0.55	0.65	0.67	0.76	0.85	0.85	"
13	G-3	0.75	0.78	0.50	0.60	0.60	0.70	0.77	0.78	"
14	B-2	0.49	0.55	0.52	0.61	0.62	0.70	0.77	0.78	"
15	M-G	1.15	1.13	1.10	1.09	1.34	1.36	1.10	1.08	"
16	Auramine	1.10	1.10	0.97	0.96	1.15	1.31	1.10	1.08	"
17	Rhodamine B	1.10	1.10	0.99	0.98	1.12	1.20	1.09	0.99	"
	Rf of R-105	0.85	0.87	0.86	0.88	0.66	0.71	0.82	0.81	"

\*1 Thin-layer

1. EASTMAN : CHROMAGRAM Sheet K301R2 (Silica gel)
2. E. MERCK A. G ; Kieselgel G, Slurry prepared with H<sub>2</sub>O
3. " ; " Slurry prepared with NaOAc
4. " ; Aluminumoxyd G

\*2 Single dye solution 0.02ml of 0.05% aq.

\*3 Mixture, Color No. 1~4 Monoazo dyes (0.05% in 0.5% NaOAc aq on TL-3)  
 " " 5~9 Xanthene dyes  
 " " 10~14 Triphenyl-methane and Indigoid  
 " " 15~17 Nonlegal basic dyes

\*4  $R_{RD} = \frac{Rf \text{ of Dye}}{Rf \text{ of R-105}}$  R-105 = Rose Bengal (Color Index No. 45440)

Table 5 Integral Readings of TLC-Spots with Densitometer

No.	Dye	Filter ( $m\mu$ )	Volume of sample (ml)	Integral Reading				
				TL*1—1	TL*1—2	TL*1—3	TL*1—4	TL*1—5
1	Y-4	428	0.002	56	55	68	104	diffuse
2	R-2	520	"	50	58	73	162	diffuse
3	R-102	501	"	54	63	81	100	57
4	Y-5	480	"	56	56	14	110	80
5	R-104	520	"	62	73	153	122	36
6	R-3	520	"	43	118	125	123	57
7	R-106	568	"	107	102	123	176	119
8	R-103	520	"	116	170	207	197	96
9	R-105	568	"	70	68	83	97	110
10	V-1	568	"	140	183	183	126	98
11	B-1	632	"	93	90	82	135	31
12	G-2	632	"	35	46	40	8	3
13	G-3	632	"	80	105	88	74	16
14	B-2	617.5	"	8	42	26	—	14
15	non-legal* <sup>2</sup> dye mixture	428	0.006	95	112	171	108	27
16		568		124	148	190	280	30
17		617.5		96	121	158	182	—

\*1 Thin-layer

1. EASTMAN : CHROMAGRAM Sheet K301R2 (Silica gel)
2. Kieselgel G, Slurry prepared with H<sub>2</sub>O
3. " , " " " 1% NaOAc aq.
4. Aluminumoxyd G " " " H<sub>2</sub>O
5. Kieselguhr G " " " H<sub>2</sub>O

\*2 Mixture of Malachite Green, Auramine and of Rhodamine B

開されたスポットをただちに、そしてそのまま濃度測定をしようとするのが光電濃度計による直接定量法である。そこでこの方法によつての色素スポットの定量のための予備的検討を行なった。

測定スリットは1.0×10mm, 感度レバーは0~1, 試料部送り速度は30mm/min, 試料透明度ダイヤルは半透明で, フィルターは差し込み取替式なので単一色素溶液については, その色素の最大吸収波長近くの波長のものを用いた。測定結果を Table 5 に示す。この濃度積分値はいずれも0.002ml, すなわち原線上の試料

溶液は0.05%であるため, 各色素の1 $\mu$ g に対応する値である。この場合, 各薄層間で積分値が異なるのは, 展開までの色素のテーリングや薄層成分との吸着型化合物による微細な構造変化, 溶媒-吸着剤-色素間の分配, 色素自身の退色と展開時間の差など検討すべき問題が多い。シリカゲル系のみ吸着剤についての各色素の積分値はだいたい近い値を持っているようである。

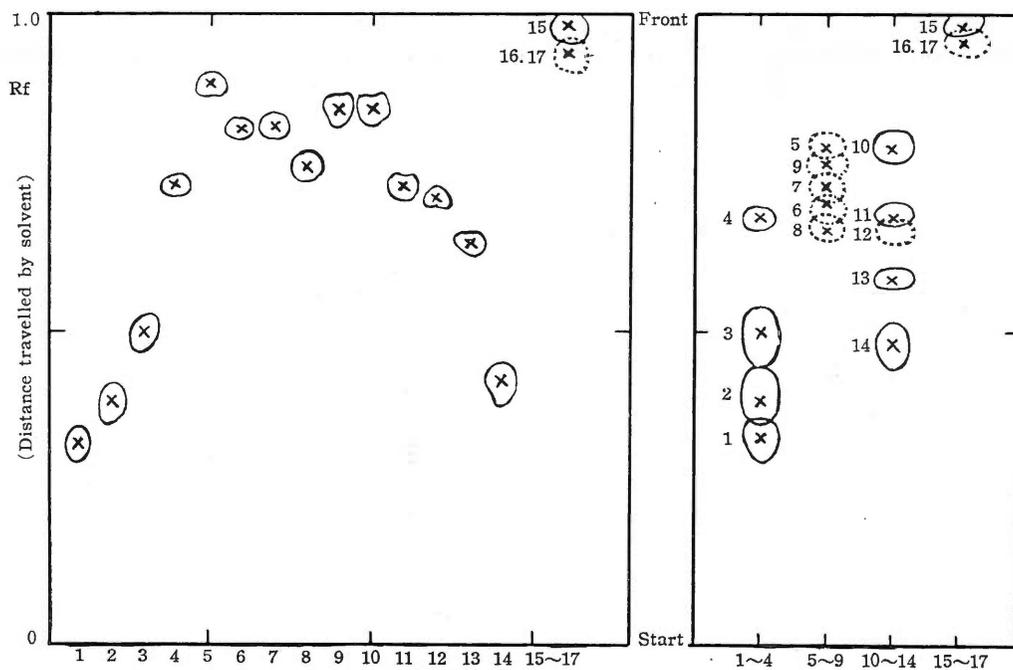
色素各系ごとの等容混合物の定量の可能性を検討するため濃度計測を行なった結果が Table 6 であ

**Table 6** Integral Reading of TLC-Spots on Layer 1 and 3

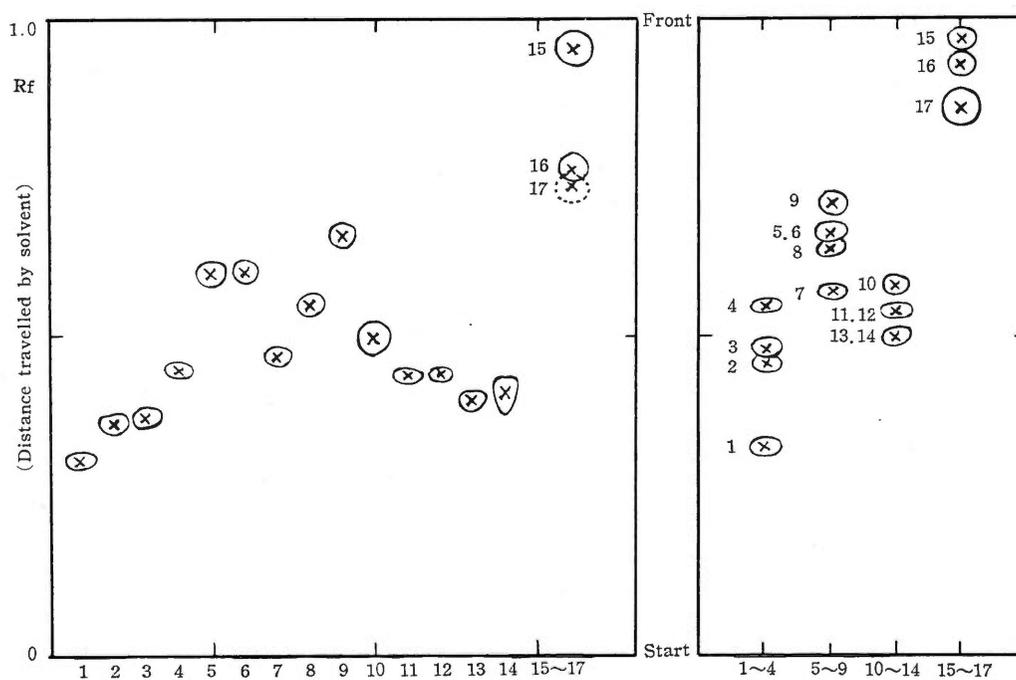
No.	Dye	Volume of Sample (ml)	Integral Reading							
			TL - 1*				TL - 3*			
			Filter (m $\mu$ )				Filter (m $\mu$ )			
	Monoazo		428	480	501	520	428	480	501	520
1	Y-4	0.002	50	43	21	5	68	31	17	8
2	R-2	"	18	39	46	50	19	60	67	73
3	R-102	"	15	42	54	51	40	83	81	77
4	Y-5	"	21	56	50	40	8	14	9	11
	1~4 Mixture observed	0.008	214	244	233	251	150	176	205	202
	(1~4 Mixture Calculated)	—	(104)	(180)	(171)	(156)	(135)	(188)	(184)	(169)
			Filter (m $\mu$ )				Filter (m $\mu$ )			
	Xanthene		520	568			520	568		
5	R-104	0.002	62	17			153	22		
6	R-3	"	52	4			125	5		
7	R-106	"	68	107			80	123		
8	R-103	"	116	0			207	—		
9	R-105	"	32	70			98	83		
	5~9 Mixture observed	0.010	329	176			483	159		
	(5~9 Mixture Calculated)	—	(328)	(188)			(663)	(233)		
			Filter (m $\mu$ )				Filter (m $\mu$ )			
	Triphenyl-methane and Indigoid		568	617.5	632		568	617.5	632	
10	V-1	0.002	140	55	30		183	77	34	
11	B-1	"	43	73	93		73	93	82	
12	G-2	"	4	11	35		33	51	40	
13	G-3	"	45	79	80		78	118	88	
14	B-2	"	6	6	8		25	26	15	
	10~14 Mixture observed	0.010	241	243	237		253	232	164	
	(10~14 Mixture Calculated)	—	(239)	(224)	(246)		(392)	(365)	(259)	

\* Thin-layer

1. EASTMAN : CHROMAGRAM Sheet
3. Kieselgel G Slurry prepared with 1% NaOAc aq



**Fig. 1** Chromatogram of EASTMAN CHROMAGRAM Sheet (Silica gel)



**Fig. 2** Chromatogram of Kieselgel G layer prepared with 1% NaOAc

1. Y-4 2. R-2 3. R-102 4. Y-5 5. R-104 6. R-3 7. R-106 8. R-103 9. R-105 10. V-1  
11. B-2 12. G-2 13. G-3 14. B-2 15. Malachite Green 16. Auramine 17. Rhodamine

る。これは薄層1および3のFigure 2 および3のスポット上を走査させたものである。この場合、単一色素溶液およびある系の色素混合物とも、系の成分色素が単一のときに用いた各極大吸収に近い波長のフィルターをすべて用いた。たとえばモノアゾ系では単一色素スポットも混合色素のスポットもすべて428, 480, 501, 520 $\mu$ のフィルターを用いて測定した。もし混合物の積分値がおのおのの波長について、成分色素の積分値の加算したものになれば、定量的意義を有することになる。

Table 6の結果から薄層1は薄層2よりも加算性がみられる。これはRf値の再現性を示したクロマトシートの均一性にあるとも考えられる。特にキサンテン系とトリフェニルメタン系では優れている。薄層3についても加算性がある程度みられるといつてよからう。特にフェノール性水酸基による塩基性吸着層の効果でキサンテン系に加算性が成立するようである。しかしこの加算性の可否についてはさらに十分な検討を行なう予定である。

#### 4 結 論

タール系食用色素14種および不許可色素3種の薄層クロマトグラフィによる実験を行ない、次の知見を得た。

1. 展開溶媒は n-ブタノール, エタノール, 水, 濃アンモニア水 (2:1:1:0.4) の混合溶媒に2%酢酸ナトリウムを加えたものがよい。

2. ケイソウ土が成分のKieselguhr Gはほとんどの色素が溶媒前線に達し、分離の目的には不適である。

3. Eastman 社製“Chromatogram”(シリカゲル系)での色素水溶液のクロマトグラムはスポットが拡がり気味である。しかしアプリケーションで自製したKieselgel G塗布プレートよりRf値の再現性が良好である。

4. Kieselgel Gを純水の代りに1.0%酢酸ナトリウム水溶液で処理し、塗布したプレートで最も濃縮された長円状の展開スポットが得られ、混合色素水溶液を展開して得られたスポット間の重なりが最も少ない。この場合、試料溶液は色素を0.5%酢酸ナトリウム水溶液に溶解させたものは、純水に溶かしたそれより良好な結果が得られるが、Rf値は全般に前者が低い。しかしキサンテン系色素のR-3とR-104, およびトリフェニルメタン系のG-2とG-3の分離が困難である。

5. 薄層クロマトグラム上のスポットの直接定量を光電濃度計を用いて検討し、色素溶液の同定および定量に有力な指針を得た。

#### お わ り に

本研究の遂行に際し、有益な助言や指導を与えられた鳥取大学工学部工業化学科教授田中昌也理博に深く感謝します。またこの実験を通じて絶えず努力して頂いた田中研究室の浜部妙子嬢、およびデータの整理や実験に努力してくれた同研究室の卒業研究学生の岩田正彦君および岩田勉君に謝意を表します。

日本化学会中四国・九州支部合同北九州大会(北九州市八幡区)で口頭発表(昭44.10.31)

#### 文 献

1. Egon Stahl: Dünnschicht-Chromatographie, 2. Aufl. (1967)
2. J. Schormüller: Handbuch der Lebensmittelchemie, Band II/2. Teil Analytik der Lebensmittel, Nachweis und Bestimmung von Lebensmittel-Inhaltsstoffen, (1967)
3. J. G. Kirchner: Thin-Layer Chromatography Technique of Organic Chemistry, Volume XII, (1967)
4. G. Hesse: Chromatographisches Praktikum, Methoden der Analyse in der Chemie, Band 6, (1968)
5. J. Chromatography, Supplementary volume 1968 Bibliography of Paper and Thin-Layer Chromatography, 1961-1965.
6. E. J. Shellard: Quantitative Paper and Thin-Layer Chromatography, (1968)
7. E. Synodinos, G. Kotakis, E. Kokkoti-Kitakis: La Rivista Italiana Delle Sostanze Grasse, Vol. XL. Dicembre, 48-50, (1963)
8. M. K. Ramamurthy and V. R. Bhalerao: Analyst, Vol. 89, 740-744, (1964)
9. 石川, 原, 古谷, 中沢編: 薄層クロマトグラフィ—基礎と応用, 2版 (1965)
10. 川城, 藤井編: 食品添加物試験法, (1966)
11. 川城, 藤井編: 新版食品添加物ハンドブック (1969)
12. 石橋武二著: 衛生化学ガイドブック (1969)
13. 日本薬学会編: 衛生試験法註解 (1968)
14. 食品添加物公定書註解編集委員会編: 第二版食品添加物公定書註解 (1968)

# 写真現像剤の赤外線分光分析による 定性及び定量分析について

勝 田 正 男

<昭和44年10月16日受理>

## Qualitative and Quantitative Analysis of Photographic Developing Reagents by Infrared Spectroscopy

Infrared spectroscopy facilitates some convenient qualitative and semiquantitative analytical procedure for determination of main organic components in the photographic developers.

It can be pointed out that a minute component attended in large amount subsidiary inorganic salts, which is difficult to elucidate directly on the spectral chart, also can be discriminated by differential method.

If it is the case that some reference infrared spectral chart is available, the result of qualitative analysis may be more convincing than that obtained by paper chromatography. Concerning to accuracy in quantitative analysis, nevertheless, it is complicated one owing to poor reproducibility in transmittance of KBr sample disk.

Masao Katsuta

### 緒 言

市販既調合現像剤の分析が簡便迅速に出来るならば、既発表の現像液組成や指定現像液組成と比較して、手持印画紙やフィルムに、更に作画意図に適合するか否かを予て予想出来て便利である。

組成は企業秘密として発表されて居らなくても、PQ 或は MQ 等大別された系統がある上に、現像主剤や助剤が多数一剤に用いられる例も多くない。この様な条件は吸収スペクトル分析に好都合なので、赤外線吸収スペクトルによる定性・定量分析を卒業研究に行はせた結果を参照して、若干の補足実験を行った結果をのべる。

一般に行はれて居る現像剤の分析は、溶剤抽出后ペーパークロマトグラフ法による定性分析、及び水溶液に対する容量分析である。<sup>1)2)</sup> 現像主剤である有機還元剤は水溶性で、無極性有機溶媒、なかんずく赤外線分光分析に用い得る  $\text{CCl}_4$ ,  $\text{HCCl}_3$ ,  $\text{CS}_2$  等によっては、その難溶性の為に、抽出も吸収スペクトル測定も実施し難い。

水、アルコール、アセトン、酢酸エチルエステル等

は、共存無機塩類迄溶解したり、塩類と反応することも有るばかりでなく、現像剤の大部分が有する-OH基、-CO基と共通の官能基を有する為、試料と溶剤が同一又は至近の赤外線吸収スペクトル吸収帯を示す為に、溶解性が良くても溶液法でのスペクトル分析に適当でない。

従って固体のまま測定するのであるが、Nujol法は定量精度が良いとは云えないので<sup>3)</sup>、専らKBr錠剤法による赤外線吸収スペクトルを分析し、大量存在の主成分については、大略目的を達し得た。従って本報では無機塩類成分については、特に関連のあるもの以外については述べず、また従来化学分析法との比較は後にゆずることにした。

### 実 験

#### 使用薬品

使用薬品については特に精製は行わなかったが、写真薬品については、その性質に従って黒紙で蔽光するか、褐色広口瓶に分封して蔽光した。保存については、測定に便利な形に粗粉碎して、シリカゲル又は

P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> 入りのデンケーター中に置いて乾燥に勉めた。  
Hydroquinone (中外写真薬品 K K 製)  
(HQ と略称する。現像薬で PQ と称するときは Q が之に当る)

Methol	(川口化学工業 K K 製) (中外写真薬品 K K 製)
(Me と略称する。本報に限り Methyl 基の意味と異なる。現像薬で MQ と称するときの M が之に当る。)	
Phenidone	(Geigy 社製) (中外写真薬品 K K 製)
Glycin	(浪速写真産業 K K 製) (N-p-hydroxyphenylglycine)
Amidol	(浪速写真産業 K K 製)
Benzotriazol	(浪速写真産業 K K 製)
N-dimethyl-p-phenylenediamine sulfate	(中外写真工業 K K 製)
Na <sub>2</sub> SO <sub>3</sub> 試薬一級	(和光純薬 K K 製)
Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> 試薬一級	(和光純薬 K K 製)
Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	(和光純薬 K K 製)
KBr (赤外線吸収スペクトル用特純品)	(日本分光工業 K K 製)

#### 装 置

EPI-G 型 日立回折格子赤外線分光光度計  
測定範囲 4000~1200cm<sup>-1</sup> Range 1  
1333~400cm<sup>-1</sup> Range 2  
標準スリットプログラム N での解像力  
3000cm<sup>-1</sup> で 2.5cm<sup>-1</sup>  
1000cm<sup>-1</sup> で 2.0cm<sup>-1</sup>  
透過率精度 ±0.5%, 透過率再現性 0.5%  
波数精度 3000cm<sup>-1</sup> で ±5cm<sup>-1</sup>  
1000cm<sup>-1</sup> で ±2cm<sup>-1</sup>

#### 複光路型

化学天秤	島津製作所 A2-P 型	秤量 200mg 感量 0.1mg
振り天秤	島津製作所	秤量 100mg 感量 0.05mg
微量天秤	長計量器製作所	秤量 20g 感量 0.02mg

#### 試 料

Konitone	(小西六写真工業 K K 製)
Veritone	(中外写真工業 K K 製)
PQ Universal Developer	(PQUD と略称する) (敷島写真工業 K K 製)
Konidol Super	(小西六写真工業 K K 製)

#### 実験方法

実験は Lambert-Beer の法則にもとずき定量する。  
試料モル濃度 C, 成分は添字 1, 2, …… n, で示し,

入射光強度 I<sub>0</sub>, 透過光強度 I, 波長 λ 吸収層の厚さ l, モル吸光係数 k のとき, 上記の法則は次式で示される。

$$I_n \left( \frac{I_0}{I} \right)_\lambda = k_{1\lambda} C_1 l + k_{2\lambda} C_2 l + \dots + k_{n\lambda} C_n l$$

いま n 個の key band を撰んで Cramer の公式によれば, 原理的には C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, …… C<sub>n</sub> が求められるが, 誤差の関係や成分間の相互作用の為に, 共存する大量成分に対して少量成分を求めるには, Lambert-Beer の法則の不成立等の為に, 誤差が大きくなり, 三成分以上での定量が不可能になる。

従って主成分が大量のときには, その成分を対照側に, 試料側の主成分の吸収を相殺するのに過不足なくなる迄添加し, 且光路長が一定の条件で C<sub>1</sub> の特性吸収帯 (key band) の吸光度から, C<sub>1</sub> を定量する。即ち示差測定法である。key band の撰択には, 共存物質の吸収帯と重ならず, 且吸光度が大きく鋭い波数を選ぶ。そして各種濃度の純物質の吸光度から検量線を求める。

検量線法は多大の労力を要するので, 試料に純物質を逐次添加し, 濃度対吸光度を key band に対して求め, 添加量零に外挿した場合の吸光度が, 添加量何程の吸光度に等しいかを求める内部標準法も考えられる。但し, 内部標準法は定量精度が劣る。

KBr 錠剤法は別項で詳論する誤差により, 透過率 I<sub>0</sub> の再現性が悪く, I<sub>0</sub>/I の変動が大きいので, log (I<sub>0</sub>/I) の代りに, log (I<sub>0</sub>-I) を濃度に目盛ることも試みた。コニドールスーパーの場合には, 測定点が多く誤差が大で, いづれも大差ない結果を得た。

#### 実験手技

KBr 錠剤法<sup>9)</sup>による赤外線吸収スペクトル測定法は, 公知のことであるが, 実験誤差は再現性不良によるもので, その主因をなすのが, 製錠過程の巧拙に依るので, 敢て詳説する。

前記の如く, 予備粉碎して P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> 又はシリカゲル入りのデンケーター中に保存した薬品, 試料は, 恒温 (冬期 20℃ 夏期 25℃) 恒湿 (相対湿度 40%) の赤外線分光実験室中で, 精秤し, めのう乳鉢で 7 分間以上磨砕混合し, 錠剤成型器に均一に充填したのち, 回転真空ポンプで 6 分間以上吸引しながら, 410~450kg/cm<sup>2</sup> のゲージ最高油圧を加えて, 油圧器で圧搾成型し, 圧力の自然緩和後の終圧が 400kg/cm<sup>2</sup> 以上にする。

錠剤径 = ピストン径 = 13mm 中, 油圧器ピストン径 43mm 中で総加圧 6~7 × 10<sup>8</sup>kg で, 錠剤の 1mm<sup>2</sup> 当り大略 44~45kg である。

KBr は 200mg 又は 300mg, 試料量は 0~2mg 又は

0~3mgを用い、測定終了後にマイクロメーターキヤリパーで1/1000mm迄錠剤の厚さを読み取る。

市販既調合現像剤主成分は、予備実験で定めた $\text{Na}_2\text{SO}_3$ などをKBrに加えて、対照側光路に置き、完全な吸光度補償の下で、他成分の吸収を求める、所謂示差吸収スペクトル測定が必要なことも経験した。

波長較正は赤外線分光器付属品の、日立製作所製波数標準用ポリスチレンフィルムによって行った。

湿度は毛髪湿度計（自記、一週間巻日本計量器工業社製）で監視したが、空気調節装置の除湿設定の制御より低感度で、湿度急変（降雨開始、多人数入室等）には応答するが、KBr錠剤が吸湿失透し易いときにも、定常状態では特別に異常を検出しなかった。

現像主剤の波数4000~400 $\text{cm}^{-1}$ についてはKBrを対照側にも挿入して、予備実験の際の成分判定や、検量線作成用key band決定の為の赤外線吸収スペクトル資料を得る。

## 実験結果

全測定範囲の吸収曲線及び検量線については一括して別図に示す。 $\text{Na}_2\text{SO}_3$ を対照側光路に入れたコネドールスーパーの測定をはじめ、試料が測定中に徐々に失透したりして、同一試料濃度でも、錠剤毎に透過率が変動し、甚しいときには±2%にも及び、製錠后長時間安定な測定値を得ることが、困難であったから、濃度を変えただけの系列では、標準スリットNに固定し、波数拡大やGain拡大は行はず、走査速度はFast 2、稀にFast 3で行った。Gainは大部分は2で、時に5で行った。示差吸収スペクトルでは、得られる図形が小さく、赤外線吸収強度を面積法では求められない。亦、透過率変動の為再現性がやゝ不良であるから、絶対強度法も優れて居るとは云えない。故に、赤外線吸収曲線のkey bandの裾に接線を引き、吸収極大の位置での透過率又はOptical densityを測定する頂点強度法を用いた。頂点強度法は作図と計算が最も容易であるが、誤差も亦大きくなるけれども、止むを得なかった。

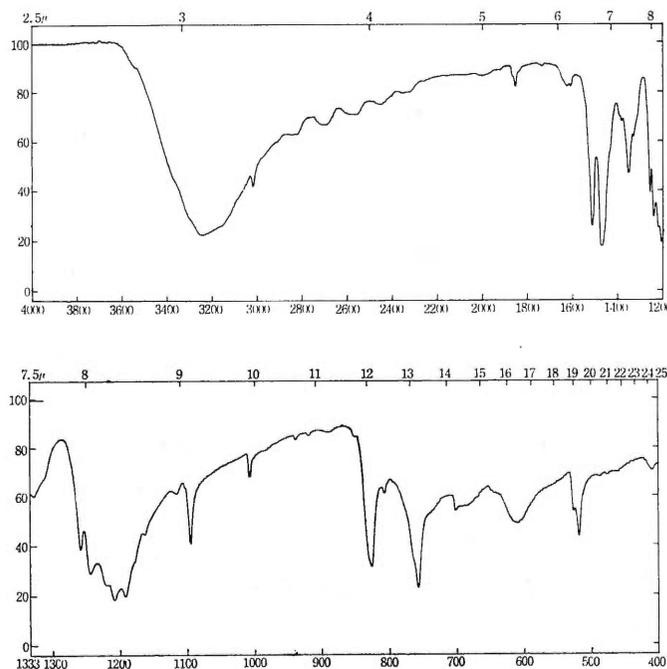
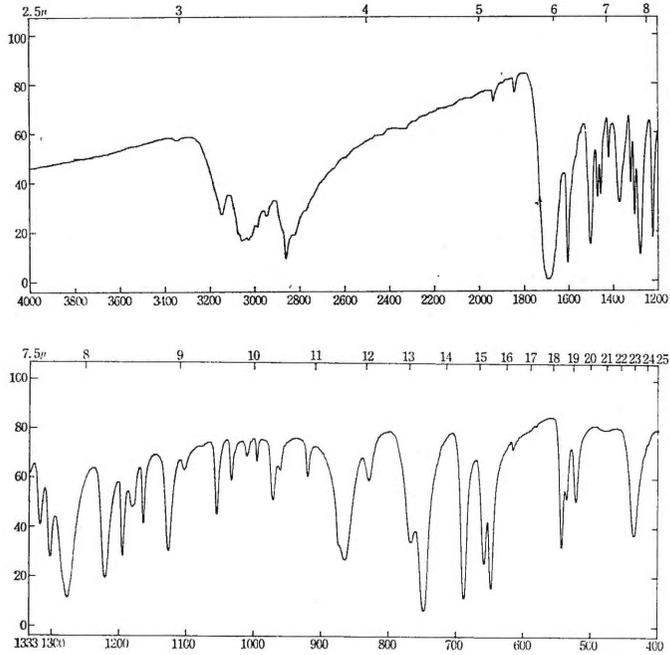
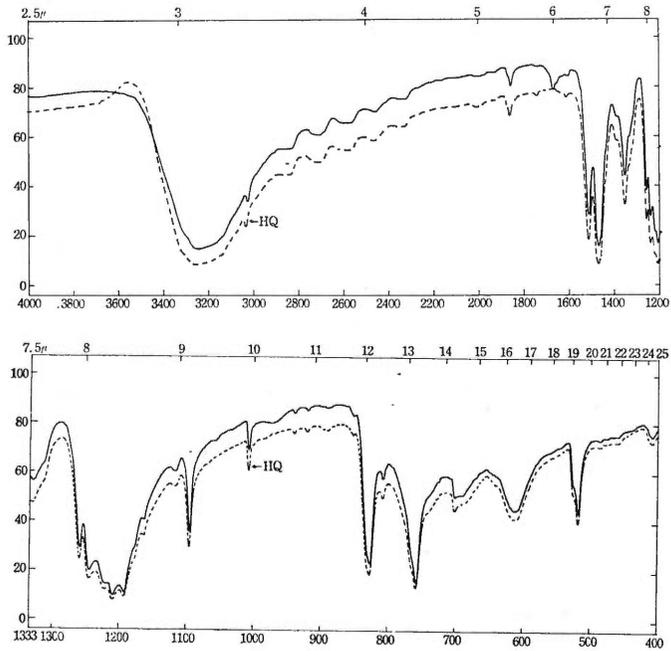


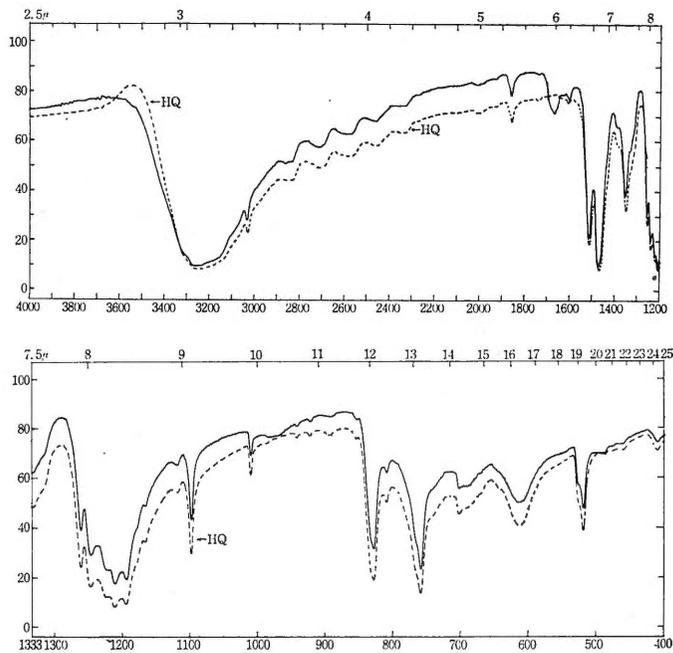
Fig. 1 Hydroquinone 1.1mg HQ/300mg KBr  
Exp. No. 1 thickness 0.84mm



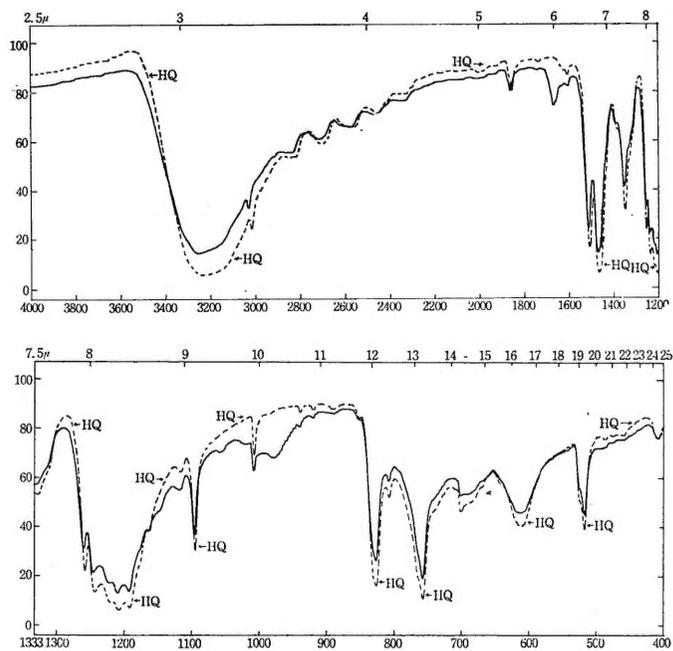
**Fig. 2** Phenidone 1.5mg Phe./300mg KBr  
Exp. No. 6 thickness 0.845mm



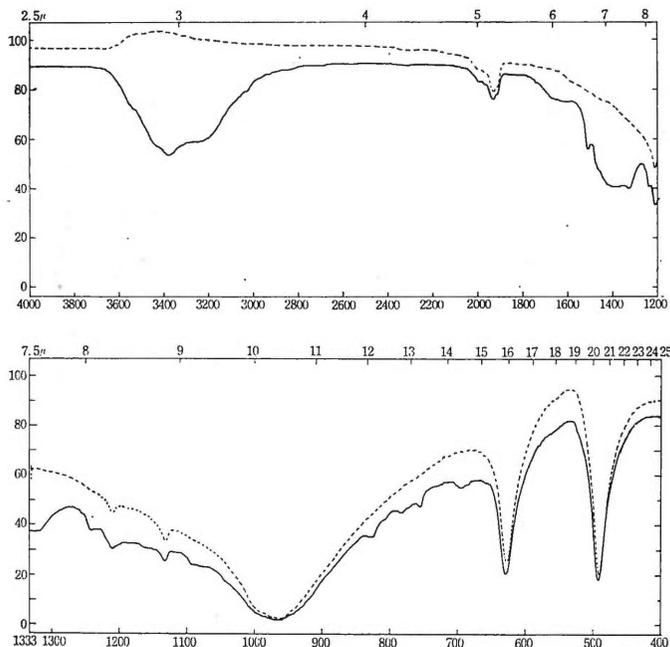
**Fig. 3** Konitone 1.0mg/300mg KBr vs. 300mg KBr  
and Hydroquinone 1.0mg/300mg KBr vs.  
300mg KBr thickness 0.820mm (former)  
0.818mm (latter). Exp. No. 54



**Fig. 4** PQ Universal Developer 1.0mg/300mg KBr vs. 300mg KBr and Hydroquinone 1.0mg/300mg KBr vs. 300mg KBr thickness 0.826mm (former) 0.820mm (latter.) Exp. No. 55



**Fig. 5** Veritone 1.0mg/300mg KBr vs. 300mg KBr and 1.0mgHQ/300mg KBr vs. 300mg KBr thickness 0.816 (former) 0.813mm (latter). Exp. No. 56



**Fig. 6** Konidol Super 3mg/300mg KBr vs. 300mg KBr (lower line) and Hydroquinone 2.7mg/300mg KBr vs. 300mg KBr (Upper line) thickness 0.820mm (former) 0.823mm (latter). Exp. No. 57

### 実験結果の考察

A剤B剤に分封してある市販現像剤は、A剤は現像主剤に少量の保恒剤(写真用語で $\text{Na}_2\text{SO}_3$ の如き酸化防止剤のこと)等を含み、B剤は $\text{Na}_2\text{SO}_3$ ,  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ,  $\text{Na}_2\text{B}_2\text{O}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , KBr等の保恒剤, アルカリ剤, pH調整緩衝剤, カプリ抑制剤等から成ると考えられる。

本報はA剤の有機成分を主に追求したが、一部は推定不能の吸収帯で、少量成分であることと、写真薬品のすべてのスペクトル図を得て居ないため、確定出来ないものがあった。亦、フェニドンは微量の為定量に到らないものもある。PQUDは現在市販中止となつて、不明の点の追試が出来ない。

(1) コニトーンA剤 1680, 1600, 970,  $545\text{cm}^{-1}$ のHQ吸収曲線との差から、フェニドンの存在が、 $490\text{cm}^{-1}$ の吸収から $\text{Na}_2\text{SO}_3$ の存在が推定される。 $1410\text{cm}^{-1}$ は $\text{Na}_2\text{CO}_3$ 又はグリシンが、 $545\text{cm}^{-1}$ はフェニドン又はグリシンであろうが、グリシンの可能性は極めて微弱である。

(2) PQUDについても $4000\sim 1200\text{cm}^{-1}$ では吸収はほとんどHQと一致する。但し $3600\sim 3400\text{cm}^{-1}$ の吸収から $\text{Na}_2\text{SO}_3$ ,  $1680\text{cm}^{-1}$ からフェニドンが推定

出来ることもコニトーンと同様である。(以下 $\text{cm}^{-1}$ を略して数値のみを書く) 1320はフェニドン又はグリシン, 1090はHQにフェニドン又はグリシン, 1060はフェニドン又はアミドール, 980はフェニドン, メトール, グリシン, 650はフェニドン又はグリシン, N-diethyl-p-phenylenediamine, 560はグリシンに一致する。故にHQとフェニドンの他、 $\text{Na}_2\text{SO}_3$ とグリシンを含むのではないかと考えられる。

推定が確定的でないのは、上記980の吸収帯はフェニドンではそれほど強くはなく、フェニドンのみに帰せられない。亦880~860, 747, 687等フェニドンに存在して、PQUDに出現しない吸収帯が多数ある。逆にPQUDの吸収帯に対応吸収帯を持つ物質中の、強い吸収帯でPQUDに出現しないものに、グリシン, アミドール, メトール等があるからである。

(3) ベリトーンについて、この吸収曲線も1680のフェニドン吸収以外はほとんどHQと一致する。その他1150にアミドール又はグリシン, フェニドン, ベントール, 1058にフェニドン, 1020にベンゾトリアゾール又はN-diethyl-p-phenylenediamine, 980にメトール又はグリシン, フェニドンの吸収が見られる。

(4) コニドールスーパーについて

300mg の KBr に 3mg の試料を加えた吸収曲線は、ほとんど  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  の吸収曲線に近い。一剤型微粒子現剤像は、ほとんど  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  を含まない。故に 2.5mg  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  を対照とした示差吸収曲線を描かせると、なお  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  の吸収が残る。2.7mg を用いると  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  の吸収が残らないばかりでなく、過剰の対照による吸収帯の反転による、透過度増大も認められなかった。

故に 3mg コニドールスーパー及び 2.7mg  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  を夫々 300mg KBr に加えた錠剤につき、示差吸収曲線を描かせ、830, 760 $\text{cm}^{-1}$  の HQ の key band について定量した。HQ 0.1~0.07mg/300mg コニドールスーパーと推定した。

HQ の示差検量線は、HQ 単独の検量線と一致しない。即ち  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  の吸収の影響が強く、Lambert-Beer の法則は成立しない。コニドールスーパー中の  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  の吸収を対照により相殺すれば、HQ の吸収曲線に弱いフェニドンの吸収が重なったものを得るはずだが、 $\text{Na}_2\text{SO}_3$  の強い吸収の波数域では、透過光量の不足から、HQ の吸収帯は浅くなり、吸収曲線は歪

む。亦対照が 2.7mg が最適か 2.74mg が最適かは、測定値のパラッキから判定困難であろう。

6.4mg コニドールスーパー錠は、透過光量不足で HQ の吸収はかえって減少する。然し 3mg 程度の試料では HQ の定量がようやく可能なので、微量のフェニドンの定量は出来ない。ここに直接法では感度による限界があって、抽出、濃縮の手数を省略した簡易迅速性の有利さは失はれることになった。

第 1 表

商品名	PQUD	コニトーン	ベリトーン
成分 wt %			
HQ	85.63	78.91	83.44
Phe	2.17	2.04	4.99
無機塩	12.66	16.94	9.54
計	100.46	97.89	97.97

他にコニドールスーパーで  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  Ca 90%  
HQ 3.3 ~ 2.2%  
PQ 痕跡

亦 PQUD にはグリシン (Glycin) を含む可能性を認めるが確実に判って居ない。

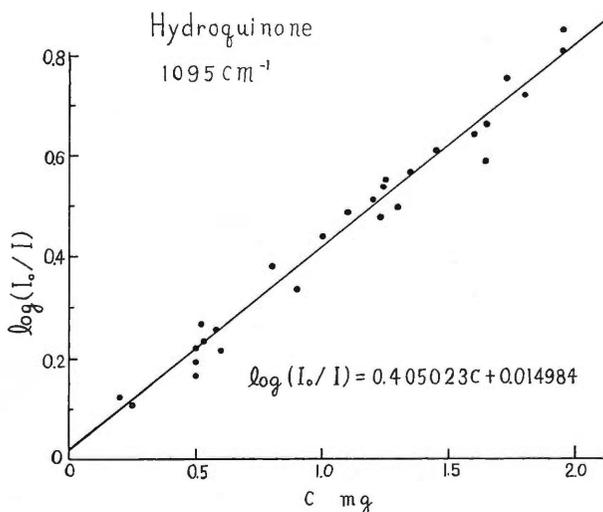
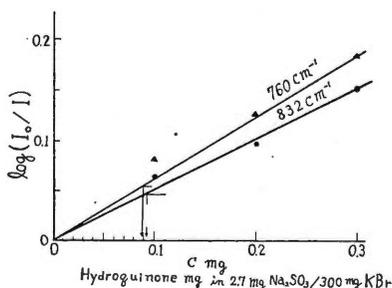


Fig. 7 Calibration for Hydroquinone

Fig. 8 Calibration for Hydroquinone contained in large amount of  $\text{Na}_2\text{SO}_3$ .

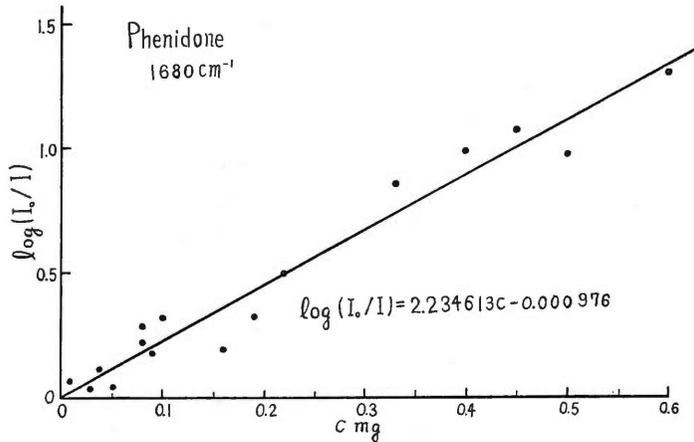


Fig. 9 Calibration for Phenidone

## 結 論

(1) 供試市販既調合現像薬は、PQ 型のみでメトールは含まれて居らない。一部小量成分で定性分析不確定のものがあつた。

(2) 無機塩を含む現像剤は失透し易く、再現性が劣り、定量には鋭く深い吸収帯を、多数回から撰定するとよい。

(3) 予備実験一回で、示差吸収スペクトルに補償に用いるべき主成分は、判然となる。

(4) 示差吸収スペクトル測定を必要とする小量成分については、Lambert-Beer の法則が成立せず、純物質で得た検量線は使用できない。

(5) 小量成分は示差吸収法以外では、存在すら判らないことがある。

(6) 化学分析、紫外吸収スペクトル、発色による

比色分析と比較しないと、優劣は不明であるが、主成分の測定は定性では優れ、定量でやゝ劣ると考えられる。微量成分については測定の困難性が大きい。

(7) 長い抽出時間、特別の試薬を必要としない点はペーパークロマトグラフ法に優るが、小量成分迄、一遍では定性分析出来ない欠点があるが、赤外吸収スペクトル法にある。検量線の作成に多大の労力を必要とする割に、定量分析精度は高くないが、二剤型現像薬に対する、実用目的判定は不可能ではない。(振動の帰属については紙数の関係から後報にゆづる。)

写真関係薬品の赤外吸収スペクトルは引続き発表して定性に役立てたい。本研究は平川博一、賀川磨理、浅井幹雄の諸君の卒業研究と教務員道山三津雄氏の協力に負う所が多であった。ここに厚く感謝の意を表す。

## 参 考 文 献

- 1) JIS K7701~7716
- 2) 科学写真便覧(新版)(1959)中巻 359頁 菊池真一、西村龍介、福島信之助、藤沢信著 丸善
- 3) 実験化学講座(統編)(1964)第10巻 232~238頁 日本化学会編 丸善
- 4) 高分子実験学の進歩(1961)第14巻 213頁 高分子実験学講座 共立出版
- 5) 赤外線吸収スペクトル 定性と演習 定性篇(1960)中西香爾著 南江堂
- 6) 赤外線吸収スペクトル 第14集(1963)化学の領域増刊 54号 67, 96, 85頁 南江堂
- 7) 赤外線吸収スペクトル 理論と応用 第1集(1963)化学の領域増刊 21号 157頁, 81頁 南江堂
- 8) 赤外線吸収とラマン効果(1958) 共立全書 129 水島三一郎 島内武彦 共立出版

## 誤差の主因

赤外線吸収スペクトル測定では、KBr 錠剤法で測定値の再現性不良は機器に基く蓋然誤差を遙に超えて起る。

1) 錠剤の厚さの変動。300mg KBr, 13mmφ で、錠剤の測定部位によるバラツキは 1/100~3/100mm で、失透甚しい場合では、4/100mm 位失透部が薄い。錠剤相互のバラツキは 5/100mm が普通であるが最薄値と最厚値は 0.83~0.91mm と開く。この相異は KBr は 300mg ± 0.1mg 以内の変動であるが、添加する試料や薬品量が 0~3mg と変動することにも依るが、主な理由は加圧成形の差である。損失はメノー乳鉢、乳鉢に播落されずに残る分と、製錠器とシリンダー間隙への、KBr の塑性流動による侵入にもとづく損失とであるが、この変動はさして大きくない。

有効成形圧力差に基く錠剤厚さの変動。

油圧ゲージ最高圧力 440kg/cm<sup>2</sup> にして放置すると、KBr のガラス状透明化を伴う、粉末間隙消失による可塑流動が起り、加圧ピストンの移動と共にゲージ圧力は 400kg/cm<sup>2</sup> 程度に下る。この際 400kg/cm<sup>2</sup> 以下になった時は追加加圧するが、この時に相当大きな力を必要とし、最高圧力の微妙な調節は不可能で、それに続く可塑流動による圧力低下速度並びに到達最終圧力は、予測も調整も困難である。特に外気湿度の高いと

きに、錠剤縁辺部に失透が起ったり、出来上り良好に見えても、スペクトル走査中に失透を起し易かった。この為、秤量、磨砕の迅速、真空吸引時間延長の外、最高加圧を 500kg/cm<sup>2</sup> 位に高める。即ち厚さの変動が大きくなる。

### 2) 透過率の変動

上述の様に厚さが変動しても、損失を除けば、加圧の大小にかかわらず、試料モル数は不変であるから、厚さと吸光度には比例関係はなかった。

また測定中に失透が進行した際の吸光度は、肉眼で見る失透の印象から予想されるよりも、記録紙上の透過率変動は僅少であった。失透錠剤では、吸収帯は巾広く浅くなり、オパールガラス法スペクトル測定<sup>4)</sup>の場合の様に、散乱光と透過光に対するスペクトル測定になって居て磨砕粒度が大きい様である。この様な条件では、Christiansen filter の様に、散乱透過光の波長依存強度変化も予想される。肉眼的失透は直接の透過率の変化の原因ではなく、むしろ随伴する結果とさえ考えられる。

なお無機塩を含む錠剤は、対照用 KBr 錠剤よりも失透し易い傾向から見て、錠剤中の微視的空隙が、失透までの時間の長短に関係があると推定され、このことは製錠の際の加圧圧力増加が、失透防止に有効な事実と一致する。

実験番号	No. 1	No. 3	No. 12	No. 6
物質名	ハイドロキノン	メトール	Na <sub>2</sub> SO <sub>3</sub>	フェニドン
吸収帯 (cm <sup>-1</sup> )	( 3500 3000 1860 1520 1470 1355 ( 1260 1150 ◎ 1095 1008 ◎ 827 ◎ 758 ( 630 580 520	( 3700 2200 1635 1520 1475 ( 1460 1315 1277 1228 ( 1180 1000 980 828	( 3650 3200 1940 ( 1750 970 ( 700 630 494	( 3150 3100 ( 2900 2860 ◎ 1685 1600 1500 1375 1280 1240 1128 1055 970 865 748 679 543 435

実験番号	No. 24	
物質名	コニドールスーパー	
吸収帯 ( $cm^{-1}$ )	1248 (1240)	HQ 1245
	1100	HQ 1095 (Ph 1104?)
	920	(Ph 920?)
	832	HQ 832 Me 830 (Ph 830?)
	782	(Ph 768?)
	759	HQ 759 Me 748* Ph 749*
	695	HQ 700 (Me 710?)
	630	Na <sub>2</sub> SO <sub>3</sub> 630 Me 632
	528	HQ 528

1248 (1240) は他のチャートでは1240に現れて1248にはないことを示す。(…………?)は対応波数に吸収があるが、弱くて帰属させ難いことを示す。

\*印は波数がやゝずれて居るか、巾広くて対応が無理と推定した。Me; Methol, Ph; Phenidoneの略。

振動数(波数)の各官能基の如何なる基準振動に対応するかは第2報に譲る。

# Primitivism In *The Woodlanders*

〈昭和44年9月30日受理〉

Yasuo Matsuo

## I

In England the industrial revolution rapidly developed the growing capitalism, and forced, on the other hand, the old-fashioned handicrafts to the ruin. It was necessary as an industrial nation that England should have exported the manufactured goods and imported raw materials and food from abroad at a low price. Therefore, the industrialization of the country was based on the sacrifice of the old home industries, especially the agricultural ones.

On this account, the needs of the times have crept into this remote Wessex woodland without exception, and its traditional mode of life is doomed to decline under the influence of a new social system. A transitional period of an agricultural village in England can be recognized all through the novel. The hairdresser, one of the characters, who lives in a town, says of Little Hintock in which the greater part of the action of this story takes place:

‘Ah—how’s Little Hintock folk by now! Never have I been over there since one winter night some three year ago—and then I lost myself finding it. How can ye live in such a one-eyed place? Great Hintock is bad enough—but Little Hintock—the bats and owls would drive me melancholy-mad! It took two days to raise my sperrits to their true pitch again after that night I went there. Mr. Melbury, sir, as a man that’s put by money, why not retire and live here, and see something of the world?’<sup>1)</sup>

The story begins with this hairdresser’s visit to the solitary woodland hamlet, Little Hintock. Now let’s get, with him, into the woodland, ‘one of those sequestered spots outside the gates of the world.’<sup>2)</sup> When we alight down from the van one evening in autumn, the position of the wood-environed hamlet can be still distinguished by a few faint lights winking through leafless boughs.

In one of these dim lights he finds what he is looking for. In the room where the light is shining we first see a girl seated on a chair, busily working by the light of the fire of wood. She is making spars rapidly and skilfully, which are used by thatchers. Her hands are red and blistering, with little pretension to beauty, except her beautiful hair of chestnut color, which it is his business to buy. Illness of her father compels her to support the family by a man’s job. The girl, Marty, plays at the beginning, and, indeed, throughout the novel, a secondary part in this story. And yet her austere attitude of life in her simple living is described so realistically that her life can be said to represent the typical state of the agricultural districts of England in those days. And such occupations as hers, Hardy says in his Preface to the novel, are doomed soon to disappear.

In respect of the occupations of the characters, the adoption of iron utensils and implements in agriculture, and the discontinuance of thatched roofs for cottages, have almost extinguished the handicrafts classed formerly as 'copsework,' and the type of men who engaged in them.<sup>3)</sup>

So the tragedy of this story can be ascribed first to the declining woodland village under the influence of the times. It is not all of a sudden that the declining fortune comes over the woodland, but it has been gradually undermining the long established community of it. Mr. Melbury lives in such a house, which is an aspect of the decay of the woodland.

It was a dwelling-house of respectable, roomy, almost dignified aspect; which, taken with the fact that there were the remains of other such buildings hereabout, indicated that Little Hintock had at some time or other been of greater importance than now.<sup>4)</sup>

As far as this novel is concerned, Hardy seems to regard this changing world not as developing but as declining. What is interesting is that Hardy betrays himself by the preference he shows with an 'almost dignified aspect' in presenting horse-bells as the representative of the old fascinating woodland life. Mr. Melbury is also among the last to retain horse-bells in his neighborhood. Ringing at Little Hintock, where the lanes remain as narrow as before the days of turnpike-roads, these sound-signals are still as useful to him and his neighbors as in former times. When a load of oak timber is being sent away before dawn to a town many miles off, the sounds of the bells are heard chiming harmoniously through the fog. It looks as if they were holding their own against the declinings of the forest hamlet. On its way to the town, for example, the team comes upon two foreign carriages, in one of which we can see Mrs. Charmond sitting. It is the carriages that are compelled to go back to make way for the team. Then the team comes on ponderously, and

the clanging of its sixteen bells as it passed the discomfited carriages tilted up against the bank, lent a particularly triumphant tone to the team's progress—a tone which, in point of fact, did not at all attach to its conductor's feelings.<sup>5)</sup>

We must remember that it is to the novelist's feelings that the tone in question attaches, of course.

This self-contained community has its own mode of life. But the current thought of the times does not allow it to remain as it has been, either. 'As in most villages as secluded as this,' intermarriage among the inhabitants is very frequent, and there are hardly two houses in Little Hintock which are not related to each other, 'by some matrimonial tie or other.'

For this reason a curious kind of partnership existed between Melbury and the younger man [Giles Winterborne]—a partnership based upon an unwritten code, by which each acted in the way he thought fair towards the other, on a give-and-take principle.<sup>6)</sup>

Man is a social creature, and it would not be an overstatement to say that the best way would not be other than that 'each act's in the way he thinks 'fair towards the other, on a give-and-take principle.' And yet Hardy describes the 'unwritten code' as the cause of the tragedy. It is looked upon as absolute and so it ought to be observed, on the one hand, yet as burdensome and, though not willingly, to be put aside, on the

other.

In short, the story is of a collision of the old life with the new, or the rustic life with the urban. There is, as a social background, the declining woodland hamlet that is one tragedy, and with which the tragic plot of the characters of this story is interwoven closely.

## II

It is cultivation and its effect upon the inhabitants of the woodland that Hardy puts great stress upon. And it would not be too much to say that education is regarded here as a symbol of cultivation, or urban life. Therefore, it is considered as something foreign to the lives of the woodlanders. Mr. Melbury had a bitter experience because of his ignorance of some trivial matters. He said to his men: 'They may laugh at me for my ignorance, but that was father's fault, and none o' my making, and I must bear it. But they shall never laugh at my children, if I have any; I'll starve first!'<sup>77</sup> He is one of what is called a self-made man, and has worked hard to give Grace, his only daughter, a good education ever since he was young. He is now a mastermerchant dealing with trees and timber, and, though a well-informed man, he is such a doting father that once his passion for his daughter is kindled, he loses his critical eye, which often leads a man to put the cart before the horse. He makes an effort to realize his new desire to marry her well, seeing that he has given her high education, far beyond that of any native in the woodland. He makes an idol of education, so to speak. So it is natural that his attention should be attracted to the young doctor, whom he looks upon as clever and learned, and who is, on the other hand, supposed by the natives to be 'in league with the devil.'

'He is a strange, deep, perusing gentleman; and there's good reason for supposing he has sold his soul to the wicked one.'<sup>83</sup>

Mr. Melbury is, on the contrary, of the opinion that

'he's only a gentleman fond of sciense, and philosophy, and poety, and, in fact, every kind of knowledge; and being lonely here, he passes his time in making such matters his hobby.'<sup>89</sup>

As far as his opinion is concerned, he is right; but that his love for his daughter is mainly for the sake of his own desire is clear. He thinks he must do his duty toward Winterborne's dead father, who loved Grace's mother as a girl, till he, Melbury, won her away from him by a trick, and married her himself. As the two children seemed to be attracted to each other, he determined to do all he could do to make up for the wrong by letting his daughter marry the lad, Winterborne, and to give her the best education he could afford to make the gift as valuable as possible. But now his daughter is highly cultivated and refined, Melbury is in spite of his duty not satisfied now to let her throw herself away upon Winterborne, still a rough country-bred man, making cider and planting trees.

Thus Melbury's parental fondness reaches the highest of its folly. Desiring to sow in her heart a craving for a social position, he shows Grace his cheque-book and the counterfoils. Looking over them, she says with regret that she cost a great deal, like the horses and wagons and the like. His reply is, however, that he did not want her to look at the cheques, but simply meant to give her an idea of his 'investment transactions,' and that, if she costs as much as they, she must not mind at all, for he believes

she will 'yield a better return.'

'Don't think of me like that!' she begged. 'A mere chattel.'

'A what? Oh, a dictionary word. Well, as that's in your line I don't forbid it, even if it tells against me,' he said good-humouredly. And he looked her proudly up and down.<sup>10)</sup>

No matter how much she may wish she were not in her father's eyes merely a symbol of his own pride, it is of no use. To him education is a means by which he seeks to free himself from his own inferiority that was implanted early in life. It is inevitable that such a man as he should think it 'investment' to educate and then marry his daughter well so that she may 'yield a better return.' So there is no reason why he should not choose the young doctor for her husband. Soon he manages to get them married. As for Fitzpiers, the doctor, he has always thought of the advantageous marriage he is bound to make with a woman of family as respectable and rich as his own. His motive in this marriage with Grace, however, consists chiefly in his thought: 'But as an object of contemplation for the present, Grace Melbury would serve to keep his soul alive, and to relieve the monotony of his days.'<sup>11)</sup> It is such an alliance as this that Melbury believes would bring his daughter much happiness. How, then, can he realize there would be anything wrong in this marriage?

Above, education has been considered from the educator's point of view, because the educated, that is, Grace, has been at the mercy of his ambitions till her marriage. But there comes a time when the educator's good-will becomes the cause of unhappiness for the educated. It is now necessary to deal with what the educated, Grace, thinks of education. After she and her husband returned from their honeymoon journey, his real character reveals itself. She is surprised at the suddenness of his distaste for the old-fashioned woodland forms of life which on his courtship he professed to regard with so much interest. And what is worse is that Fitzpiers begins to take a fancy to Mrs. Charmond, for they were once lovers in their early days. With the pretension of attending to a patient, he begins to visit her with increasing frequency. Noticing his intention, Melbury tells his daughter to go and appeal to Mrs. Charmond. But she does not obey him any more. She can criticize now what her education has brought to her, while the doting father tries to persuade her to care for her position in vain.

'You ought to care. You have got into a very good position to start with. You have been well educated, well tended, and you have become the wife of a professional man of unusually good family. Surely you ought to make the best of your position.'<sup>12)</sup>

Her answer is resolute:

'I don't see that I ought. I wish I had never got into it. I wish you had never, never thought of educating me. I wish I worked in the woods like Marty South! I hate genteel life, and I want to be no better than she!'<sup>13)</sup>

And she continues her answer to her amazed father's 'Why?:'

'Because cultivation has only brought me inconveniences and troubles. I say again, I wish you had never sent me to those fashionable schools you set your mind on. It all arose out of that, father. If I had stayed at home I should have married—'<sup>14)</sup>

It is hardly possible to expect a person who has made an idol of education to see what she means. Her further assertion is that she has never got any happiness outside

Hintock: 'O, the misery of those January days when I got back to school, and left you all here in the wood so happy!'<sup>15</sup> In short, by marriage she has found what is great and little in life, (of which there is something to be considered later.)

Her education here may be regarded as a mere means to make a sarcastic comment on the worldly cultivation of the times. Yet, in Hardy's novels the problem of education is found almost everywhere. It appears, for example, in *The Son's Veto*, in which a young priest will not allow his mother to remarry a fruit dealer who was once her betrothed. The reason for his refusal is partly his prejudice against the lower classes her lover belongs to, but still more it is the biased education—if it might be called so—which he has received. In the last stage of the story, the son shows a more crooked anger, and the mother is the more persistent. Finally he takes her before a little cross and altar that he has erected in his bedroom for his private devotions. There he bids her kneel, and swear that she will not wed Samuel Hobson, the fruit dealer, without his consent. According to Hardy:

The poor woman swore, thinking he would soften as soon as he was ordained and in full swing of clerical work. But he did not. His education had by this time sufficiently ousted his humanity to keep him quite firm; though his mother might have led an idyllic life with her faithful fruiterer and greengrocer, and nobody have been anything the worse in the world.<sup>16</sup>

Some four years after this, she dies, we are told, perhaps, having pined her heart away. And yet the priest remains unreformed.

From this instance as well as from that of Melbury, the problem of education in Hardy's novels should not be looked upon merely as a satire on the worldly cultivation of the times. It could be said that Hardy is warning us to trace education to its origin, to see whether it is the end of education to make our lives rich both physically and spiritually.

### III

We have left it unsaid to look into what Grace has found by her marriage. It is after her return to her native woodland that she is, for the first time in her life, taught what she could not learn in her fashionable school-days. On returning to the woodland, Grace is keenly interested in Mrs. Charmond, a wanton woman. Winterborne knows that a girl who can go to the Hintock House and associate with her will be hardly contented with him, because he is only a woodman, cider-merchant, and apple-farmer. Sometimes, before her marriage, Grace is even satisfied with a feeling that she would be the heroine of the hour; moreover, she is proud, as a cultivated woman, to be the wife of a cultivated man. She is so blind that it is not until their marriage that she can be aware that her husband has 'double and treble-barrelled hearts.' These hearts of his soon find, and indeed already one of them has found, its way to its destination. At last, she is obliged to see her husband off, who she knows is going to where Mrs. Charmond lives, all the while she is wondering if there is one world in the universe where the fruit has no worm, and marriage no sorrow. She thinks of the relation between herself and her husband:

When... she found him as merely human as the Hintock people themselves, a new foundation was in demand for an enduring and staunch affection—a sympathetic

interdependence, wherein mutual weaknesses are made the grounds of a defensive alliance.<sup>17)</sup>

She knows her husband has not such qualities at all, so it is with an indescribable emotion that she sees him off. And it is just at this time that she meets Winterborne returning from cider-making. When he appears before her,

He looked and smelt like Autumn's very brother, his face being sunburnt to wheat-colour, his eyes blue as corn-flowers, his sleeves and leggings dyed with fruit-stains, his hands clammy with the sweet juice of apples, his hat sprinkled with pips, and everywhere about him that atmosphere of cider which at its first return each season has such an indescribable fascination for those who have been born and bred among the orchards.<sup>18)</sup>

The description of her mind is continued further: 'Her heart' rises 'from its late sadness like a released bough; her senses' revel 'in the sudden lapse back to Nature unadorned.' 'The consciousness of having to be genteel because of her husband's profession,' 'the veneer of artificiality which she' acquired 'at the fashionable schools,' are thrown off, and she becomes 'the rude country girl of her latent early instincts.'<sup>19)</sup>

She looks into her heart, and finds what is great and little in life, and makes a discovery that all she has hitherto clung to is nothing but 'the veneer of artificiality.' By marriage she realizes how much that is humanly not great can co-exist with exceptional attainments. She is now a 'rude country girl,' and the rusticity in Winterborne offends her acquired tastes no longer.

Honesty, goodness, manliness, tenderness, devotion, for her only existed in their purity now in the breasts of unvarnished men; and here was one who had manifested such towards her from his youth up.<sup>20)</sup>

Needless to say, the 'one' is Winterborne, who has been unfortunate in the sense of every day life, bearing well in spite of his misfortunes, by which he has invested himself with 'a real touch of sublimity.' It is these perceptions, and not her husband's whimsical murmurs, that have made such abstract conceptions as these visible to her. Walking along with Winterborne, 'Autumn's very brother,' she can for the first time understand what the primitive life is. Hardy tells us the state of her mind is plainly seen in her face.

Her abandonment of the seductive hour and scene after her sense of ill-usage, her revolt for the nonce against social law, her passionate desire for primitive life may have showed in her face.<sup>21)</sup>

'Her passionate desire for primitive life' needs consideration. It is not before she has been bound to Fitzpiers by 'social law,' that is, their marriage, which was, when once made, irrevocable in those days, that she can distinguish what is important and what is not important in life. But she is now confronted by the severe realities of life. The relation between Fitzpiers and Mrs. Charmond gets closer, and in the end they run away abroad together, when Melbury is informed that Grace can be easily made free under a new law. Having humiliated by his son-in-law, he tries to remedy the state of things so that Winterborne may choose her, and that he may make amends to him in doing so, but the effort turns out to be in vain. The fact is that Fitzpiers' conduct is not sufficiently cruel to Grace to make her free.

Meantime, she receives a report that her husband is coming home. She is now

driven into a corner, and there are only two ways left to choose: one is to reconcile herself to her fate and remain as his wife; the other to run away from him, and the latter means 'to revolt against social law.' Here is an interesting description of her:

In the darkness of the apartment to which she flew nothing could have been seen during the next half-hour; but from a corner a quick breathing was audible from this impressionable creature, who combined modern nerves with primitive feelings, and was doomed by such co-existence to be numbered among the distressed, and to take her scourgings to their exquisite extremity.<sup>22)</sup>

Just as the declining Hintock hamlet is regarded as one of the transitional agricultural villages in those days, so Grace may be regarded as one of the typical persons in the village who are educated in such a transitional period. For she is an cultivated woman who combines 'modern nerves with primitive feelings.'

With her 'primitive feelings' she can, indeed, feel what the primitive life is that the woodlanders, especially Winterborne and Marty, are living. But the primitive world in which they live is really much deeper than she thinks it is. It is now necessary to get to the scene where this misunderstanding becomes the death of Winterborne.

Just before her husband's arrival, she runs away, leaving a note behind her to the effect that she is going to visit one of her school-friends. But as it is impossible for her to get to her destination in the darkness alone, she goes to Winterborne's dwelling house to ask him to accompany her a little way. However, before they have gone far, unfortunately it begins to rain so heavily that they are obliged to retreat to his house, consisting of only one room. As it is impossible for them, or at least for him, to spend the night under the same roof, he retires into a little shelter, offering the house to her. It is formed of hurdles, and thatched with brake-fern, which can scarcely keep the rain off. The rain increases with increasing storm. When she is sure that the faint voice which she thought at first was simply a cry of an animal is the host's, she cannot bear that he should suffer out in the rain, crying to him through the darkness:

'Don't you want to come in? Are you not wet? *Come to me, dearest! I don't mind w'at they say or what they think of us any more.*<sup>23)</sup>

We can hear the same voice from Grace. When she asks him to go with her a little way, and sees him hesitating to help her to run away, she urges him,

'Yes. Appearance is no matter, when the reality is right. I have said to myself, I can trust you.'<sup>24)</sup>

In these two voices of her appeal to him, the dawn of modern morality can be clearly recognized, and this modern morality reaches its full growth in *Tess* and *Jude*. Apart from this, it is true that her 'modern nerves' lead her to 'revolt against social law.' Yet however strongly she may insist that 'Appearance is no matter, when the reality is right,' to Winterborne there are 'household laws' to be observed. A little time before this event, when he received the news that she could not be his, she, unaware of it, said to him that she was not right, after all, in thinking there was any harm in his kissing her. But the 'household laws' appeared before him.

The wrong, the social sin, of now taking advantage of the offer of her lips, had a magnitude in the eyes of one whose life had been so primitive, so ruled by household laws as Giles, which can hardly be explained.<sup>25)</sup>

Thus he feels almost a pleasure of altruism in keeping her in his house, regardless of his own safety. Though the social law denies for ever their opening a paradise, it is not without 'stoical pride' that he accepts the present trying conjuncture, with an idea that there is one man on earth in whom she believes absolutely, and that he is the man. With his clothes wet, and exhausted beyond endurance, he passes away in spite of all the care Grace takes for him. The pure primitive life he led is, according to Hardy, beyond her till his death.

Her timid morality had, indeed, underrated his chivalry till now, though she knew him so well. The purity of his nature, his freedom from the grosser passions, his scrupulous delicacy, had never been fully understood by Grace till his strange self-sacrifice in lonely juxtaposition to her own person was revealed.<sup>26)</sup>

There is no doubt that 'her timid morality' can be put down to her combination of 'modern nerves with primitive feelings,' with all 'her passionate desire for primitive life.' And in the end this co-existence of hers makes herself reconciled to her husband. In short, Grace was taught in contact with the primitive woodlanders of her native land what she could not learn at the fashionable schools, and 'her senses revelled in the sudden lapse back to Nature unadorned.' But even if she grasped what the primitive life was, she herself could not enter into it.

#### IV

While Grace begins to be interested in Mrs. Charmond, Winterborne and Marty are at work outdoors. He has a thousand young fir trees to plant with his own hands in a neighbouring spot where trees were felled by the woodlanders. To all appearance, quite carelessly as he may seem to shovel in the earth, there is a sort of sympathy between him and the trees, which he deals with so that the roots may take hold of the soil in a few days. When any of the journeymen, on the other hand, plant them in the same way, a quarter of the trees will die away during the following August. Marty usually plays the part of holding the tree in a perpendicular position while he throws in the earth. When they are planting the young trees in this way, Marty says:

'How they sigh directly we put 'em upright, though while they are lying down they don't sigh at all.'<sup>27)</sup>

When she erects one of the young pines into its hole, and puts up her finger, the soft musical breathing sets in. The girl thinks it is not to cease night or day till the grown tree will be felled.'

'It seems to me as if they sigh because they are very sorry to begin life in earnest—just as we be.'<sup>28)</sup>

Winterborne critically looks at her, and expostulates with her about the impropriety of her feeling. There is hardly anything laughable in Marty's peculiar imaginative life. Pain brings her to think, to think brings her to wisdom, and wisdom makes life endurable. When it is obvious to her that her secretly cherished love for Winterborne is without return, she falls into more reflective thought, and submits herself to her fate. For her this world is not to be enjoyed, but to be endured, and though she meets her fate with resignation, her resignation is, of course, not blind, but conscious acquiescence

in the result of her thinking deeply of nature and love, life and death. She has gained almost superhuman contact with the trees, too, so that she cannot help sympathizing with them in their being 'sorry to begin life in earnest.' With Marty as well as Winterborne, there are too many scenes in which their lovely though austere attitude of life is easily found to enumerate in detail.

At the news that Winterborne is gone, poor Creedle hastens to the scene, an old man who has worked for him, and has been waiting for him to come to tell him to prepare the cider-barrels for the coming cider-season. At the sight of the body he cannot suppress his mourning, and laments the loss of his master.

'Well, I've knowed him from table-high; I knowed his father—used to bide about upon two sticks in the sun afore he died!—and now I've seen the end of the family, which we can ill afford to lose, wi' such a scanty lot of good folk in Hintock as we've got. And now Robert Creedle will be nailed up in parish boards 'a b'lieve; and nobody will glutch down a sigh for he!'<sup>29)</sup>

We have seen the declining conditions of Hintock hamlet, and here again one of the families, 'which we can ill afford to lose,' has come to an end. Moreover, it is not only by the woodlanders that the loss of him is grieved. Hardy brings here another lamentater, but this is so silent that no critics have taken it into consideration. When Grace and her father start for home, leaving Marty and Creedle behind with the body, it is just in the blue dawn, and, Hardy says,

The whole wood seemed to be a house of death, pervaded by the loss to its uttermost length and breadth. Winterborne was gone, and the copses seemed to show the want of him; those young trees, so many of which he had planted . . . were at that very moment sending out their roots in the direction that he had given them with his subtle hand.<sup>30)</sup>

Some days after his death, Grace and Marty make it a rule to go to the grave to clear its place once a week. They often stand there, each respectively bringing back her own memory of him, and Grace is abased when she finds she has never understood Winterborne as Marty has; that Marty alone, of all the women in Hintock and the world, approximated to his level of intelligent intercourse with nature.

In the first evening Grace fails to keep her appointment, Marty is standing at the gate of his grave, waiting for her for a long time, when she hears the footsteps of Melbury's men returning from their search. In the darkness she can gather in their conversation a general idea of what happened: Grace is by this time again in the arms of another than Winterborne.

In the moonlight, the solitary girl stoops down and puts her fresh flowers in the place, and the story is concluded with her lovely touching words:

'Now, my own, own love,' she whispered, 'you are mine, and only mine; for she has forgot 'ee at last, although for her you died! But I—whenever I get up I'll think of 'ee, and whenever I lie down I'll think of 'ee again. Whenever I plant the young larches I'll think that none can plant as you planted; and whenever I split a gad, and whenever I turn the cider wring, I'll say none could do it like you. If ever I forget your name let me forget home and heaven! . . . But no, no, my love, I never can forget 'ee; for you was a good man, and did good things!'<sup>31)</sup>

## V

In *The Woodlanders* descriptions of the beauties of nature form a good part throughout the novel. All the natural hues and flavours are spread all through it, and spring, summer, autumn, and winter in the woodland are pictured in all colours and shades. When it is about Mid-summer's eve, except at midday the sun is not seen complete by the Hintock people, but rather in the form of numerous little stars staring through the green leaves. And when the leaves have fallen in autumn and winter, the dead leaves lie so thick as to bury the roads completely. This picturesque background of nature makes the characters so animated that nature herself seems to us to be an organic creature. And here Hardy's so-called malign Fate, which functions in the lives of his characters, corrupting their possibilities of happiness, and luring them into tragedy, is comparatively weak. It may be owing to these qualities that this novel is reminiscent of Wordsworth's Preface to *Lyrical Ballads*. When its principal object in choosing incidents and situations from "humble and rustic life"<sup>31</sup> is compared with that of *The Woodlanders*, there is much common to both, and not a few examples can be found.

Towards the end of the story, the poetical descriptions of those who lament over Winterborne's death become gradually emphatic, and are heightened into Martyr's elegy in the form of prose poetry. That these poetical feelings have emerged from "the elementary feelings"<sup>32</sup> in "humble and rustic life" makes the loss all the more mournful and full of pity. And, with regard to the plot of the story, these poetical qualities make up for the doubtful happy ending of Grace and her husband.

It is clear that it is Hardy himself that cannot help showing his sympathy for the declinings of Little Hintock, and, above all, for the death of Winterborne, in whom one can recognize the intrinsic worth of a human being.

Hardy is not really a mere pessimistic writer, as he is often said to be. He is telling us, if we care to listen to him, what he wishes the world to be. He is, so to speak, revolting against the optimism of the nineteenth-century materialism by presenting primitivism as a clue to find the relief of the Victorian morality.

Little Hintock seems to have been originally a pleasant and comfortable place to live in, supported by 'a give-and-take principle,' but, as Hardy says on the title page of this story,

'Not boskiest bow'r,  
When hearts are ill affin'd,  
Hath tree of pow'r  
To shelter from the wind!'

the way of life cannot go on smoothly when those who live in the woodland are estranged from one another. Hardy suggests primitivism to us, I believe, in order to show that there is no essential distinction between the primitive life and the cultivated, between the happy life and the unhappy. Whether one accepts his invitation to the primitive life and looks into it to find the real worth of life depends on whether one is satisfied to remain as an unquestioning servant to the material civilization today, or whether one wishes to rediscover the better part of the primitive life and apply it to the needs of one's generation.

Communing directly with Nature and living with the woodlanders together in joy and in sorrow, Hardy created this work, and his greatness will survive as long as we can find greatness in Nature.

## Notes

1. T. Hardy: *The Woodlanders*, Macmillan Pocket Edition, London, p. 453.
2. *ibid.*, p. 5.
3. Preface to *The Woodlanders*, p. vii.
4. *ibid.*, pp. 25, 26.
5. *ibid.*, p. 120.
6. *ibid.*, p. 27.
7. *ibid.*, pp. 32, 33.
8. *ibid.*, p. 33.
9. *ibid.*, p. 34.
10. *ibid.*, p. 110.
11. *ibid.*, p. 169.
- 12, 13, 14. 15. *ibid.*, p. 280.
16. T. Hardy: *Life's Little Ironies*, Macmillan Pocket Edition, London, p. 52.
17. *op. cit.*, p. 257.
18. *ibid.*, p. 260.
19. *ibid.*, p. 260.
20. *ibid.*, p. 277.
21. *ibid.*, p. 261.
22. *ibid.*, p. 373.
23. *ibid.*, p. 389. (Italics not mine).
24. *ibid.*, p. 378.
25. *ibid.*, p. 365.
26. *ibid.*, p. 394.
27. *ibid.*, p. 77.
28. *ibid.*, p. 78.
29. *ibid.*, pp. 408, 409.
30. *ibid.*, p. 409.
31. *ibid.*, p. 460.
32. 33. Wordsworth and Coleridge: *Lyrical Ballads*, Edited by W. J. B. Owen, Oxford University Press, 1967, p. 156.



## Four Quartets: An Interpretation

### (2) "The Dry Salvages" and "Little Gidding"

〈昭和44年9月30日受理〉

Takehiko Tabuki

#### "The Dry Salvages"

The meaning of "The Dry Salvages" is explained by Eliot himself in a note appended to the title. "The Dry Salvages—presumably *les trois sauvages*<sup>34</sup>—is a small group of rocks, with a beacon, off the N. E. coast of Cape Ann, Massachusetts<sup>35</sup>. *Salvages* is pronounced to rhyme with *assuages*. *Gracer*: a whistling buoy." And, as he describes it at the end of the second section of this poem, this small group of rocks is 'the ragged rock in the restless waters, /Waves wash over it, fogs conceal it;/On a halcyon day it is merely a monument, /In navigable weather it is always a seamark/To lay a course by: but in the sombre season/Or the sudden fury, is what it always was.' According to George Williamson, "The Dry Salvages" involves a conversion, by their beacon, of '*les trois sauvages*' into saviors from the peril of wreckage. But they belong to the category of God with which the poem begins.<sup>36</sup> That is to say, even though they are converted into saviors from the peril of wreckage, the strength of '*les trois sauvages*' remains the same. Because the past is 'sullen, untamed and intractable' and always persists in what we call the present. In the first part of the first section of 'The Dry Salvages' the poet uses the image of the river in order to develop and extend the theme of time. The river has traditionally been used as a symbol of the onward and irrevocable movement of temporal history. Not knowing much about God, the poet thinks that 'the river/Is a strong brown god—sullen, untamed and intractable, /Patient to some degree.'<sup>37</sup> The river at first was recognized as a frontier or a conveyor of commerce. Then it became a problem confronting the builder of bridges. But the problem once solved, the brown god, the river, is almost forgotten by the dwellers in cities. However, the river, which is a 'destroyer' and 'reminder/Of what men choose to forget', is 'ever implacable, /Keeping his seasons and rages'. Even though 'unhonoured and unpropitiated/By the worshipers of the machine', it is 'waiting, watching and waiting'. As Helen Gardener says in *The Art of T. S. Eliot*, though it can for a time be ignored, it can assert its power by catastrophe as well as its inevitable progress.<sup>38</sup> It may be possible to say that the poet also used the river as a symbol of the onward and irrevocable movement of time and the inexorable movement of temporal history. Then the symbol of the river is followed by the symbol of the sea which develops and extends the theme of time further. The tolling bell of the sea

Measures time not our time, rung by the unhurried  
Ground swell, a time  
Older than the time of chronometers, older  
Than time counted by anxious worried women  
Lying awake, calculating the future,  
Trying to unweave, unwind, unravel  
And piece together the past and the future

And the ground swell, that is and from the beginning  
Clang  
The bell.

The sea with many gods and many voices transcends the rhythm of the river which is the historical and cyclic image or symbol of time. 'The river is within us, the sea is all about us'—for the river is man's time, the microcosmic rhythm of life, but the sea is the earth's time, the macrocosmic rhythm of eternity; both are frontiers.<sup>39</sup>

In the second section the poet inquires into the meaning of history and the progress of time. He asks as follows:

Where is there an end of it, the soundless wailing,  
The silent withering of autumn flowers  
Dropping their petals and remaining motionless;  
Where is there an end to the drifting wreckage,  
The prayer of the bone on the beach, the unprayable  
Prayer at the calamitous annunciation?

The only answer is that

There is no end, but addition: the trailing  
Consequence of further days and hours,  
While emotion takes to itself the emotionless  
Years of living among the breakage  
Of what was believed in as the most reliable—  
And therefore the fittest for renunciation.

There is no end, but addition, as Macbeth says in the well-known scene, "To-morrow, and to-morrow, and to-morrow, /Creeps in this petty pace from day to day, /To the last syllable of the recorded time." In order to perceive the moment of intersection of the timeless with time in this endless flux of time and find the union with the temporal and the eternal, the only thing for us to do is to listen silently to such annunciations as 'calamitous annunciation' of terror and danger, 'the last annunciation' of death and 'the one Annunciation' of history. The moment of intersection of the timeless with time transcends the dimension of time even in the dimension of time. It has not been lost, but 'requiring'. It is waiting to be remembered. As Helen Gardener says in *The Art of T. S. Eliot*, 'the only end to the flux of history is man's response to the eternal manifesting itself in time. What is permanent in this endless flux?'<sup>40</sup>

It seems, as one becomes older,  
That the past has another pattern, and ceases to be a mere sequence—  
Or even development: the latter a partial fallacy  
Encouraged by superficial notions of evolution,  
Which becomes, in the popular mind, a means of disowning the past.

The pattern of the past is not mere a sequence or addition neither is it development. Because the poet thinks that any superficial or popular doctrine of evolutionary progress is 'a partial fallacy'. 'All Eliot's dislike of such doctrine is in words. It mistakes a part for the whole; it flatters man's conceit of himself; it fails to satisfy the conditions of logical proof; it is a deception and hence leads us into error. And it is 'a means of disowning the past', of cutting the present from its heritage'.<sup>41</sup> There-

fore even the assurance of recorded history becomes blur and suspicious.

The moment of happiness—not the sense of well-being,  
 Fruition, fulfilment, security or affection,  
 Or even a very good dinner, but the sudden illumination—  
 We had the experience but missed the meaning,  
 And approach to the meaning restores the experience  
 In a different form, beyond any meaning  
 We can assign to happiness. I have said before  
 That the past experience revived in the meaning  
 Is not the experience of one life only  
 But of many generations—not forgetting  
 Something that is probably quite ineffable:  
 The backward look behind the assurance  
 Of recorded history, the backward half-look  
 Over the shoulder, towards the primitive terror.

The past experience revives in 'the meaning'. We missed 'the meaning', though we had the experience of 'the sudden illumination'. 'The past experience revived in the meaning is not the experience of one life only, but of many generations'. The recovery of the past brings back 'not the experience one life only, but of many generations', probably including some historical memories. 'The moments of agony are likewise permanent, /With such permanence as time has'. We can appreciate these better in the agony of others than in our own, 'for our own past is covered by the currents of action'. But the torment of others remains an experience which is 'unqualified and unworn by subsequent attrition'. Even though 'people change and smile', the poet says, 'the agony abides'.

Time the destroyer is time the preserver,  
 Like the river with its cargo of dead negroes, cows and chicken coops,  
 The bitter apple and the bite in the apple,  
 And the ragged rock in the restless waters,  
 Waves wash over it, fogs conceal it;  
 On a halcyon day it is always a seamark  
 To lay a course by: but in the sombre season  
 Or the sudden fury, is what it always was.

Here time is again assimilated to the river. The river is a history of perpetual destruction and preservation. It is 'the reminder of past, with its cargo of dead negroes, cows and chicken coops'. It is 'the reminder/Of what men choose to forget'. The sea and 'the ragged rock in the restless waters' are also the reminders of 'what have been' of the past. So they—the river, the sea and the ragged rock—are all what they always were. 'Time the destroyer is time the preserver'. Both the river and the rock in the sea illustrate it.

I sometimes wonder if that is what Krishna meant<sup>43</sup>—  
 Among other things—or one way of putting the same thing:  
 That the future is a faded song, a Royal Rose or a lavender spray  
 Of wistful regret for those who are not yet here to regret,

Pressed between yellow leaves of a book that has never been opened.

In the opening lines in the third section the poet muses on the future as he does in the third section of 'East Coker'. The poet says that the future is a faded flower of regret pressed between yellow leaves of an unopened book. This must be an aspect of the future. The future is not before us, as the past is not finished. Taking this into consideration, the line at the beginning of 'Burnt Norton', that is, 'time future contained in time past, is reasonable. As we interpreted at the beginning of 'Burnt Norton', this line suggests simultaneity of all aspects of time. If all aspects of time are simultaneous, the future is like the past, which is real but inaccessible through time. In this sense the future is considered as something that has already existed, as if it were a past we have not yet encountered. Therefore it may be possible to think that the future nowhere exists, but it results from what a man does now. This idea also leads us to what we call 'Eternal Now'.<sup>44</sup> Consequently there comes an addition to the epigraph of 'Burnt Norton': 'the way forward is the way back'. The future may be put as the way forward. But at the same time it is the way back. Although we can understand that the way forward is the way back, we do not like to think of such a thing, as the chorus says in *The Family Reunion*;

We do not like to climb a stair, and find that it takes us down.  
We do not like walk out of a door, and find ourselves back in the same  
room.<sup>45</sup>

Our real destination is here, where we are going is where we are. So the poet continues with his words as follows:

Fare forward, travellers! not escaping from the past  
Into different lives, or into any future;  
You are not the same people who left that station  
Or who will arrive at any terminus,  
While the narrowing rails slide together behind you;  
And on the deck of the drumming liner  
Watching the furrow that widens behind you,  
You shall not think 'the past is finished'  
Or 'the future is before us'.  
...  
'Fare forward, you who think that you are voyaging;  
You are not those who saw the harbour  
Receding, or those who will disembark.  
Here between the hither and the farther shore  
While time is withdrawn, consider the future  
And the past with an equal mind.

On a journey or a voyage, the poet says, we do not belong to any dimension of time, because time seems to be withdrawn. We can be indifferent to the past and the future. So the poet urges us to 'consider the future and the past with an equal mind'. And by the contemplation 'at the moment which is not action or inaction' we can receive the teaching of Krishna.<sup>46</sup>

“on whatever sphere of being  
The mind of a man may be intent  
At the time of death”<sup>47</sup>

‘And the time of death is every moment’. We are not the passengers who will arrive at any terminus. We are placed on the intersection of ‘time past’ and ‘time future’. Hence ‘the one action’ is to fructify every moment, which will fructify in the lives of others. The poet gives us a similar warning as Krishna admonished Arjuna on the field of battle.<sup>48</sup>

... do not think of the fruit of action.<sup>49</sup>

In this sense, there can be no ‘fare well’. There is only ‘fare forward’.

Fare forward.

O voyagers, O seamen,  
You who come to port, and you whose bodies  
Will suffer the trial and judgement of the sea  
Or whatever event, this is your real destination.

...

Not fare well,  
But fare forward, voyagers.

This is a preparation for the message of the final section of ‘The Dry Salvages’ that the meaning of history is not to be found within the dimension of past and future, but in the timeless patterns in time.

In the next section ‘the lady’ (the Virgin Mary) is asked to pray for the voyagers. This section has been set as a response to the preceding lines; that is, ‘Not fare well/But fare forward, voyagers.’ ‘The lady’ is also asked to repeat a prayer on behalf of women who have seen their sons or husbands setting forth and those who go through time and into timeless, especially those who set forth to return.

Now we come to the culminating section, the fifth section of ‘The Dry Salvages’, in *Four Quartets*.

To communicate with Mars, converse with spirits,  
To report the behaviour of the sea monster,  
Describe the horoscope, haruspicate or scry,  
Observe disease in signatures, evoke  
Biography from the wrinkles of the palm  
And tragedy from fingers; release omens  
By sortilege, or tea leaves, riddle the inevitable  
With playing cards, fiddle with pentagrams  
Or barbituric acids, or dissect  
The recurrent image into pre-conscious terrors—  
To explore the womb, or tomb, or dreams;

All these are inventions of all the modern meanings of reading the past and the future. They are ‘usual pastime and drugs, and features of the press: And always will be.’ Some of them will especially be stimulated ‘when there is distress of nations and perplexity whether on the shores of Asia, or in the Edgeware Road’. In order to

reassure the future which 'men' dread, like the anxious worried women who were calculating the future in the first section of this poem, they are concerned about fortune-tellers and astrologers. And they also 'explore' the past in order to explain the present.

Men's curiosity searches past and future  
 And clings to that dimension. But to apprehend  
 The point of intersection of the timeless  
 With time, is an occupation for the saint—  
 No occupation either, but something given  
 And taken, in a lifetime's death in love,  
 Ardour and selflessness and self-surrender.

It is only given to the saint 'to apprehend the point of intersection of the timeless with time'—the point where the eternal is realized in time. The idea of 'the point of intersection of the timeless with time' can be found in his preceding plays.

Remember, all you who are numbered for God,  
 In every moment of time you live where two worlds cross,  
 In every moment you live at the point of intersection,  
 Remember, living in time, you must live also now in Eternity.

(*The Rock*, p. 52)

But come, you must put your thoughts once more to this season of sowing  
 So with much pain shall you see Eternity crossing the current of time.

(*The Rock*, p. 53)

Then came, at the predetermined moment, a moment in time and of  
 time,

A moment not out of time, but in time, in what we call history: tran-  
 secting, bisecting the world of time, a moment in time but not  
 like a moment of time,

A moment in time but time was made through that moment; for without  
 the meaning there is no time, and that moment of time gave the  
 meaning.

(*The Rock*, p. 50)

In *Murder in the Cathedral* Thomas loses his will in the will of God in order to realize this point of intersection of the timeless with time—the eternal pattern in the flux of time.

It is not in time that my death shall be known;  
 It is not out of time that my decision is taken  
 If you call that decision  
 To which my whole being gives entire consent.  
 I give my life  
 To the Law of God above the Law of Man.

(p. 59)

According to D. E. Jones, 'the apprehension of the point of intersection of the timeless with time' is also the apprehension of 'the still point of the turning world'.<sup>50</sup> But this is not applicable. Because, as Staffan Bergsten observes, 'the idea of the intersection

of time with the timeless can hardly be imagined when the two intersecting elements are pictured as the circumference and centre of a circle.<sup>51</sup> Eliot wavers between two metaphors, 'the point of intersection' and 'the still point of the turning world', as a way to Eternity. In *Ash Wednesday* and 'Burnt Norton' the poet uses the metaphor of 'the still point of the turning world'.<sup>52</sup> But here he uses 'the point of intersection of the timeless with time'. As the poet says, the apprehension of 'the point of intersection' where the eternal is realized is said to be an occupation for the saint'. For most of us, 'there is only the unattended/Moment, the moment, in and out of time,/The distraction fit, lost in a shaft of sunlight,/The wild thyme unseen, or the winter lightning/Or the waterfall, or music heard so deeply/That it is not heard at all, but you are the music/While the music lasts'. 'The unattended moment' is just an unexpected visitation of ecstasy, or a sudden madness, as we 'lose ourselves' in the beauty of nature or of art—in 'the shaft of sunlight', the scent of 'the wild thyme', 'the winter lightning', 'the waterfall' and 'the music'. These are 'only hints and guesses,/Hints followed by guesses; and the rest/Is prayer, observance, discipline, thought and action'. And 'the hint half guessed, the gift half understood, is Incarnation'. We may enjoy hints of that apprehension from time to time. There are two interpretations of his allusion to 'Incarnation': One is 'the Incarnation of God in Christ'. The other is 'the immanence of the divine in time at any moment'. It is quite clear, however, that both aspects concern Eliot and that he has attempted to reconcile them. For he does not say *the* Incarnation. As Elizabeth Drew points out, the poem is not concerned with 'the conceptual apparatus of theology, but with the exploration of truth in the terms of human experience'.<sup>53</sup> In this sense, 'the shaft of sunlight', the scent of 'the wild thyme', 'the winter lightning', 'the waterfall', and 'the music' are all 'Incarnations'. The interpretation of time and 'Incarnation' is suggested by the words previously quoted from *The Rock*:

A moment not out of time, but in time, in what we call history:  
transecting, bisecting the world of time.

To the notion of 'Incarnation' 'bisecting history' Eliot seems to add the notion of something like a timeless or eternal dimension. 'Incarnation', not only bisected history but changed the conditions of temporal existence, made time into something different. It stands in an ecstatic vision. At this point of intersection 'the impossible union/Of sphere of existence is actual' and 'the past and the future/Are conquered, and reconciled'. And in every moment 'human kind' is in eternity through God. Therefore it follows that

right action is freedom  
From past and future also.

In *Murder in the Cathedral* Thomas finds this teaching which derives from that of Krishna—'Action rightly performed brings freedom'.<sup>54</sup> By the apprehension of 'the still point of the turning world.../Where [past and future are gathered]' he transcends the limits of time. But 'for most of us, this is the aim/Never here to be realized', for 'human kind/Cannot bear very much reality'. This will be realized, if we go on trying to attain it. We 'are only undefeated/Because we have gone on trying'.

We, content at last  
If our temporal reversion nourish

(Not far from the yew-tree)  
The life of significant soil.

'Our temporal reversion' means physical death. 'The yew-tree' is a symbol of death. We must be content at last if our physical death 'nourish the life of significant soil', such as that of 'East Coker'. As Elizabeth Drew says, this is the poem about fruitfulness of action and rebirth. So 'our temporal reversion'—physical death—may mean our whole existence on 'the turning world', or our return from the moment at the still point of intersection to the world of time.<sup>55</sup>

'Little Gidding'

Little Gidding is a small village in Huntingdonshire. Steffan Bergsten explains it as follows;

It is the place where Nicolas Ferrar in 1626 founded an Anglican community organized on almost monastic principles and intended to provide the opportunity for a devout life of contemplation ('You are here to kneel') in the midst of the political religious upheaval of the time. The place is also associated with King Charles I who visited it twice, the last time in secrecy at night, shortly after his final defeat ('If you came at night like a broken king'). . . . Richard Crashaw was also one of the visitors to Little Gidding, and George Herbert was deeply influenced by the religious ideas of Nicolas Ferrar. Thus Little Gidding aptly symbolizes the particular period of English history referred to in the poem.<sup>56</sup> . . . Thus the title of the last of the *Quartets*, 'Little Gidding', is associated with both George Herbert and Richard Crashaw. Herbert was a close friend of Nicolas Ferrar, the master of Little Gidding, with whom Herbert carried on a correspondence on a spiritual matters for many years, and Crashaw was one of the visitors to the pious community at Little Gidding.<sup>57</sup>

The chapel of Little Gidding is the place where the poet's religious element comes from. Visiting this chapel, he tries to find the temporal access to Eternity at the point of intersection of the timeless with time. He inquires into the theme of time which is the main purpose from the beginning of *Four Quartets*, and considers how all time can be redeemed through the timeless moment which precedes Eternity.

Midwinter spring is its own season  
Sempiternal though sodden towards sundown,  
Suspended in time, between pole and tropic.

This season of 'midwinter' in and out of time is explained as follows;

This is the spring time  
But not in time's covenant. Now the hedgegrow  
Is blanched for an hour with transitory blossom  
Of snow, a bloom more sudden  
Than that of summer, neither budding nor fading,  
Not in scheme of generation.  
Where is the summer, the unimaginable  
Zero summer?

'Zero summer' is supposed to be set against the real summer. 'When the short day is brightest with frost and fire' and 'the brief sun flames the ice on pond and ditches', it is an illusion which can be apprehended 'in windless cold that is the heart's heat,/Reflecting in a watery mirror' and 'a glare that is blindness in the early afternoon'. Perceiving such an uncertain and suspended time, one must come only for the purpose of prayer to this place, Little Gidding, which is the key to Eternity.

You are not here to verify,  
Instruct yourself, or inform curiosity  
Or carry report. You are here to kneel  
Where prayer has been valid. And prayer is more  
Than an order of words, the conscious occupation  
Of the praying mind, or the sound of the voice praying.

And in prayer one would attain communication with the dead who have prayed here and have become part of Eternity there, and together with them one would draw closer to that full union prefigured by the 'pentecostal fire'. The poet says that the place for the prayer 'is the nearest, in place and time,/Now and in England'. Furthermore at the conclusion of this section he adds as follows;

Here, the intersection of timeless moment  
Is England and nowhere. Never and always.

He thinks that the intersection of timeless moment can be attained through the little chapel in Little Gidding, because one can pray there.

The lyric at the opening of the second part of 'Little Gidding' recounts the successive death of the elements—air, earth, water and fire. It seems that these images in the stanzas suggest the destruction. There is no creative strife among the elements. They are destructive only and they cancel out to nothingness. This theme of the 'death of hope and despair' and of 'vanity of toil' is the basis of the conversation with 'some dead master' that appears in the following strophe.

In the uncertain hour before the morning  
Near the ending of interminable night  
At the recurrent end of the unending  
After the dark dove with the flickering tongue  
Had passed below the horizon of his coming  
While the dead leaves still rattled on like tin  
Over the asphalt where no other sound was  
Between three districts whence the smoke arose  
I met one walking, loitering and hurried  
As if blown towards me like the metal leaves  
Before the urban dawn wind unresisting.  
And as I fixed upon the down-turned face  
That pointed scrutiny with which we challenge  
The first-met stranger in the waning dusk  
I caught the sudden look of some dead master

The poet as an air-raid warden patrols the street in London, and his soul encounters 'some dead master' 'in the uncertain hour before the morning'. 'The dove' is supposed

to be the German dive-bomber. 'Three districts whence the smoke arose' is the place air-raided by 'the dark dove'.<sup>58</sup> Concerning 'some dead master', the poet continues as follows;

Whom I had known, forgotten, half recalled  
Both one and many; in the brown baked features  
The eyes of a familiar compound ghost  
Both intimate and unidentifiable.

'Some dead master' seems to be deliberately obscured. It is not one but many; 'a familiar compound ghost' composed of all the dead poets.<sup>59</sup> It seems that the poet himself is a part of the 'compound ghost'. Because he says as follows;

So I assumed a double part, and cried  
And heard another's voice cry: 'What! are *you* here?'  
Although we were not.

It is uncertain what 'a double part' means. It may be well to interpret that the ghost is part of Dante and part of Eliot. Or, as Grover Smith observes, it may be Doppelgänger of the poet (a wraith of the poet).<sup>60</sup> But there is little possibility of deciding what it means. But, judging from what he says in the following lines, the ghost on this occasion is entirely 'someone other'.

I was still the same,  
Knowing myself yet being someone other—

Meeting with the 'familiar compound ghost', the poet realizes another experience of the intersection of time. His soul and the ghost are 'too strange to each other for misunderstanding', and 'in concord' in another moment of intersection. They 'trod the pavement in a dead patrol'. Then they converse on their common concern with language. It alters as voices alter, 'for last year's words belong to last year's language/And next year's words await another voice'. They say that their 'concern was speech' and 'speech impelled' them 'to purify the dialect of the tribe/And urge the mind to aftersight and foresight'. And then the ghost discloses 'the gift reserved for age'.

Let me disclose the gifts reserved for age  
To set a crown upon your lifetime's effort.  
First, the cold friction of expiring sense  
Without enchantment, offering no promise  
But bitter tastelessness of shadow fruit  
As body and soul begin to fall asunder.  
Secnd, the conscious impotence of rage  
At human folly, and the laceration  
Of laughter at what ceases to amuse.  
And last, the rending pain of re-enactment  
Of all that have done, and been; the shame  
Of motives late revealed, and the awareness  
Of things ill done and done to other's harm  
Which once you took for exercise of virtue.

Something very much like this is the experience of 'the elder statesman' (Lord Claver-ton). He has undergone 'the rending pain of re-enactment', and he proceeds 'from wrong to wrong'.

I see now  
The many many mistakes I have made  
My whole life through, mistake upon mistake,  
The mistaken attempts to correct mistakes  
By methods which proved to be equally mistaken.

(*The Elder Statesman*, p. 99)

There is no escape from this circle, because 'from wrong to wrong the exasperated spirit/Proceeds', unless restored by that refining fire/Where you must move in measure, like a dancer'. Thus the ghost gives an icy warning to the poet desirous of the 'fruit of action'. For old age, as Grover Smith says, brings sensory anesthesia, acrimony against one's fellow men, and remorse for the past and the future is only a hell, unless one accepts the fire as purgation.<sup>61</sup> The conclusion of this section is impressive.

The day was breaking. In the disfigured street  
He left me, with a kind of valediction,  
And faded on the blowing of the horn.

This scene reminds us of the dawn which removed the ghost of Hamlet's father.<sup>62</sup> It is possible to think that the 'kind of valediction' which the ghost gave is that of 'The Dry Salvages'—'not fare well/But fare forward'.

There are three conditions which often look alike, yet differ completely. They are 'attachment' to shelf, things and persons, 'detachment' from them and 'indifference' to them. The poet says that 'indifference' resembles death, and grows between 'the live and the dead nettle' of desire. 'Nettle is 'a plant with two common species, growing profusely on waste land and noted for sting properties of leafhair'.<sup>63</sup> This seems to be used here as a symbol of sterility or barrenness. Eliot thinks that 'indeference' is the worst of all. But only by detachment can one perfect the moment which divides the past from the future and avert the danger of attachment by memory to the past, and to the future by desire.

This is the use of memory:  
For liberation—not less of love but expanding  
Of love beyond desire, and so liberation  
From the future as well as the past.

Memory can be transfigured by perfecting its meaning in the present. The pattern in which 'memory is transfigured' is in the timeless pattern. Therefore 'the use of memory' lies in 'liberation from the future as well as the past' and 'expanding of love beyond desire'. In the following lines the poet comes to think of 'sin', the antithesis of good and evil.

Sin is Behovely, but  
All shall be well, and  
All manner of thing shall be well.

Critics have pointed out that the poet has set the mysterious words of Julian of Norwich,

whom some think the greatest of the medieval English mystics.<sup>64</sup> This 'sin' is presumed to be a Christian original sin.

The evil action of the poet was 'behovely', that is, inevitable; but the weed of error, so to speak, replanted in the garden of love, shall flower into perfection. As the Redemption reconciled Adam's sin by fulfilling its potentiality for good, so a man or a nation can transfigure memories by perfecting their meaning in the present.<sup>65</sup>

'Sin is Behovely', but by love and redemption of God it will be brought to perfection. It may make one's life perfect and become its symbol, because it is the cause of redemption of God. One cannot be redeemed without sin. In this place of Little Gidding the poet thinks of the dead. 'He remembers Ferrar, King Charles here and in his death, Laud, Strafford, and even perhaps Sir John Eliot who was imprisoned before the Civil War for contumacy of the King; he remembers other such as Crashaw, who died abroad, and Milton, who 'died blind and quiet'.<sup>66</sup> Why should we celebrate those dead men than the dying? Because 'these men, and those who opposed them,/And those whom they opposed/Accept the constitution of silence/And are folded in a single party'. And we inherit 'a symbol' which is perfected in death of 'the defeated' as well as 'the fortunate'—a symbol of moral action. And the poet repeats the phrasing of Julian Norwich.

All shall be well and  
All manner of thing shall be well  
By the purification of the motive  
In the ground of our beseeching.

Apprehending 'the still point of the turning world' or 'the intersection of the timeless with time', all is brought to perfection in the succession of the 'present moment'. We go into the eternal world which transcends death and faith. Thus the third section of 'Little Gidding' contains perhaps the clearest of his purpose on writing *Four Quartets*.

The fourth section of 'Little Gidding' is lyric and short. 'The dove' which appeared in the second section appears again at the beginning of this section. This dove may also suggest the bomb-diver which air-raided London in the second section. Or it may be the dove which brings us the 'refining fire' in order to redeem us.

The dove descending breaks the air  
With flame of incandescent terror  
Of which the tongues declare  
The one discharge from sin and error.

The poet says that the hope or despair in 'time future' lies in the choice of 'pyre' which is 'a heap of combustible material, especially funeral pile for burning corpse'.<sup>67</sup> In the next strophe the poet asks who devised the torment. It is 'Love'.

Love is the unfamiliar Name  
Behind the hands that move  
The intolerable shirt of flame  
Which human power cannot remove.

This reminds us of the myth of Heracles, who, to escape the agony caused by the Nessus Shirt which his wife Deianira had given him to insure his love, lit a funeral pyre and ascended to Olympus from the consuming flames.<sup>68</sup> Our sufferings are not removable by human power, as Heracles could not remove the Nessus Shirt. Because God envelops us in His love, which 'devised the torment' of our own agony. 'Love' always prepares our agony.

We only live, only suspire  
Consumed by either fire or fire.

This fire seems to mean both the refining fire and fire of despair. It is in the choice of them that we can find ourselves whether we 'only live' or 'only suspire'.

In the last section of 'Little Gidding' the poet gathers the symbols of all four *Quartets*, and devises a musical finale as a conclusion of the poem.

What we call the beginning is often the end  
And to make an end is to make a beginning  
The end is where we start from.

This is also a musical recapitulation of the preceding *Quartets*. And Eliot takes 'the words' into consideration as he did in the fifth section of 'Burnt Norton' and 'East Coker'.

And every phrase  
And sentence that is right (where every words is at home,  
Taking its place to support the others,  
The word neither diffident nor ostentatious,  
An easy commerce of the old and the new,  
The common word exact without vulgarity,  
The formal word precise but not pedantic,  
The complete consort dancing together)  
Every phrase and every sentence is an end and a beginning,  
Every poem an epitaph.

On the assumption that the last two lines can be applied to his conception of time, it may be possible to juxtapose his conception of time and that of poem. The phrases and sentences moving in time make 'an end and a beginning', 'forming in their configuration a pattern like that of time, where each moment is death and rebirth and the totality is stillness'. And at the stillness every end is at the same time every beginning. But, in the mood of 'East Coker', the poet can call 'Every poem an epitaph'. Poem, like all human action, takes its beginning from the end—the death. Every poem will be able to be infolded into the eternity, which transcends the dimension of time—'time past', 'time present', and 'time future'. With such a consideration of time, all can be perceived in a pattern of timeless moment.

We die with the dying:  
See, they depart, and we go with them.  
We are born with the dead:  
See, they return, and bring us with them.  
The moment of the rose and the moment of the yew-tree

Are of equal duration.

'The rose', which appeared in the preceding *Quartets*, suggests life. And 'the yew-tree' (wood of kinds of slow-growing dark-leaved evergreen tree, often planted in graveyards and used merely for making bows and still in cabinet-making) suggests death. The last two lines of this strophe mean that the moment of birth and the moment of death coexist in every moment. The dead are alive in the present and their action can be reborn in us. Hence the true pattern of history is not a sequence in time but 'a familiar compound ghost' of the spiritual values which have made a people—a pattern of timeless moment'. The poet thinks that Little Gidding is the place of history of England, 'where past and future are gathered'.

So, while the light fails  
On a winter's afternoon, in a secluded chapel  
History is now and England.

With the drawing of this Love and the voice of this Calling.

'This Love' and 'this Calling' are those of God. They are also 'the love' in the rose garden and the calling of 'the bird' in 'Burnt Norton'. With these Love and Calling, 'We shall not cease from exploration/And the end of all our exploring/Will be to arrive where we started/And know the place for the first time'. So we go 'Through the unknown, remembered gate/When the last of earth left to discover/Is that which was the beginning'. After a variation on the theme of 'beginning and end' which was discussed in the 'East Coker' comes the gate leading into the rose garden and to 'the last of earth left to discover' that 'was the beginning'—'our first world' in the 'Burnt Norton'. The river and the waterfall derives from the first and the fifth section of 'The Dry Salvages'. And the lines that follow echo the first and the fifth section of 'Burnt Norton' and the second section of 'The Dry Salvages'.<sup>69</sup> 'The source of the longest river' and 'the voice of the hidden waterfall' suggest the source of life. And 'the children in the apple-tree' remind us of our ancestors in the Garden of Eden. In order to explore these 'in the stillness/Between two waves of the sea', or at the eternal moment of the present suspended between the past and the future, the bird which led us into the rose garden in 'Burnt Norton' urges us again.

Quick, now, here, now, always—  
A condition of complete simplicity  
(Costing not less than everything)

After all these inquiries, Eliot concludes *Four Quartets* with the following words:

And all shall be well and  
All manner of thing shall be well  
When the tongues of flame are in-folded  
Into the crowned knot of fire  
And the fire and the rose are one.<sup>70</sup>

'The crowned knot' generally means 'the sailor's knot of three strands'. Grover Smith interprets it as 'a Trinity knot'. 'The fire' is supposed to be the refining fire or the fire of redemption. The last line means that the fire of life and the divine love become one—our suffering and Love are one and the same.

## Notes

34. It means 'the three savages'.
35. Massachusetts is a district with which Eliot was familiar since his undergraduate years at Harvard, when he was a fervent yachtman.
36. 'Salvages' actually means 'saving of a ship or its cargo from loss by wreck or capture.'
37. 'The river' has been identified with the Mississippi, the river of Eliot's childhood spent in St. Louis. So the rhythm of the river suggests the poet's own personal recollections of his childhood environment and lasting impression. (Cf., Steffan Bergsten, *Time and Eternity*, p. 220. E. Drew, *T. S. Eliot: The Design of His Poetry*, p. 177. Grover Smith, *T. S. Eliot's Poetry and Plays*, p. 277)
38. Cf., Helen Gardner, *The Art of T. S. Eliot*, p. 170.
39. George Williamson, *A Reader's Guide to T. S. Eliot*, p. 223.
40. Helen Gardner, *The Art of T. S. Eliot*, p. 172.
41. This passage is cited from Elizabeth Drew's *T. S. Eliot: The Design of His Poetry*, p. 181.
42. As Hugh Kenner has pointed out, Eliot has not said this before, but we can find a similiar allusion in 'East Coker' V.
43. The citation of Krishna has come from his study of Indian Philosophy at Harvard from 1906 to 1909.
44. Cf., *Four Quartets: An Interpretation*, (1) 'Burnt Norton' and 'East Coker', Research Reports of the Ariake Technical College, No. 4. p. 56.
45. *The Family Reunion*, p. 99.
46. In the fable unifying the *Gita* the god Vishnu, incarnate as Krishna, counsels the charioteer of the Prince Arjuna before battle. He tell him that the action need not hamper ,that it is inevitable; the only duty of a man is to perform the obligations of his castle without interest in the profit or loss. Setting forth the way of yoga, Krishna later enunciates the other Hindu doctrine borrowed for 'The Dry Salvages', to the effect that a man at death goes to that sphere of being on which his mind is then intent. (Cf., Grover Smith, *T. S. Eliot' Poetry and Plays*, p. 281.)
47. This is an allusion to *The Bhagarad-Gita*.  
 Whatsoever state (of being) meditating upon  
 He leaves the body at death.  
 (*The Bhagarad-Gita*, translated and interpreted by Franklin Edgerton, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1952, p. 81)
48. Krishna admonished him as follows;  
 On action alone be thy interset,  
 Never on its fruits;  
 Let not the fruits of action be thy motive,  
 Nor be thy attachment to inaction.  
 (*The Bhagarad-Gita*, II, 47. Harvard University Press, p. 25)
49. Eliot has made a similiar allusion in *The Rock*.  
 I have said, take no thought of harvest, but only of  
 proper sowing. (p. 9)
50. D. E. Jones, *The Plays of T. S. Eliot*, p. 66.



Milton's last poem, the final chorus of *Samson Agonistes*:

All is best, though we oft doubt,  
What th' unsearchable dispose  
Of highest wisdom brings about,  
And ever best found in the close.

(ll. 1745-8.)

On the other hand, Steffan Bergsten has pointed out that this conclusion owes a great deal to the conclusion of Dante's *Paradiso*. (Cf., *Time and Eternity*, p. 244.)

## Bibliography

### Works by Eliot

- Collected Poems 1909–1935*, London, Faber and Faber, 1936.  
*Four Quartets*, London, Faber and Faber, 1944.  
*The Rock*, London, Faber and Faber, 1934.  
*Murder in the Cathedral*, London, Faber and Faber, 1935,  
*The Family Reunion*, Tokyo, Yamaguchishoten, 1961.  
*The Elder Statesman*, London, Faber and Faber, 1959.

### Other Works Cited

- Bergsten, Steffan: *Time and Eternity; A Study in the Structure and Symbolism of T. S. Eliot's Four Quartets*, Stockholm, Scandinavian University Books, 1960.  
 Drew, Elizabeth: *T. S. Eliot: The Design of His Poetry*, New York, Charles Scribner's Sons, 1949.  
 Frye, Northrop: *T. S. Eliot*, London, Oliver and Boyd, 1963.  
 Gardner, Helen: *The Art of T. S. Eliot*, London, The Cresset Press, 1961.  
 Jones, D. E.: *The Plays of T. S. Eliot*, London, Loutledge, 1960.  
 Kenner, Hugh: *The Invisible Poet: T. S. Eliot* London, W. H. Allen, 1960.  
 Kenner, Hugh: *T. S. Eliot, A Collection of Critical Essays*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1963.  
 Matthiessen, F. O.: *The Achievement of T. S. Eliot*, New York, Oxford University Press, 1959.  
 Mawell, D. E. S.: *The Poetry of T. S. Eliot*, London, Routledge, 1961.  
 Smith, Grover: *T. S. Eliot's Poetry and Plays*, University of Chicago Press, 1956.  
 Wheelwright, Philip: *The Burning Fountain: A Study in the Language of Symbolism*, Indiana University Press, 1959.  
 William, George: *A Reader's Guide to T. S. Eliot*, New York, Noonday Press, 1964.  
 Collir's *Encyclopedia*, Vol. VI, New York, P. F. Collir and Sons Corporation, 1957.  
 (John of the Cross), *The Complete Works of St. John of the Cross*, transl. and ed. by E. Allison Peers, London, 1934.  
*The Holy Bible*, Oxford University Press, 1924.  
*The Complete Poems of John Milton*, Washington Square Press, 1964.  
*The Bhagavad-Gita*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1952.

---

---

有明工業高等専門学校紀要

第 5 号 (1969)

昭和44年12月26日 印刷発行

編 集 有明工業高等専門学校紀要委員会

発 行 有 明 工 業 高 等 専 門 学 校  
大牟田市東萩尾町150  
電 話 大牟田 ③ 1 0 1 1

印 刷 佐 伯 印 刷 所  
熊本市九品寺3丁目6—31  
電 話 (0963) ④ 2355・2958

---

---

## CONTENTS

A Study of Health and Physical Education .....	Masaaki Teramoto .... 1
Another Proof of the Formula of the Distance Between the Origin and the Hyperplane in the Normed Linear Space .....	Meiro Inoue .... 11
One Application of Recurrence Theory for the Problem of a Machine Trouble .....	Meiro Inoue .... 13
Numerical Solution of Root Locus (Part Two) .....	Gouzo Kimura and Shiro Oyama .... 19
Theory and Numerical Calculation of Lattice Thermal Conductivity .....	Tatsuro Nagata and Katsunori Isizaki .... 23
Experimental Study on the Flow at the Suction Side of Multi-blade Fan (Part 3) .....	Kounosuke Kiyomori .... 51
A Study on Fatigue Crack Propagation in Rotary Bending of Mild Steel Round Bars .....	Akira Oda .... 59
Approximate calculation of equivalent resistance for the thin film resistance with three tabs .....	Kazuo Tsuji .... 71
Character of the Ferrite in the Microwave .....	Kenzi Ozawa .... 77
Analytical Studies on the Water-soluble Coal-tar Dyes for Food I Of Analysis by Thin-layer Chromatography (1) .....	Masao Simizu, Hideto Sasaki .... 81
Qualitative and Quantitative Analysis of Photographic Developing Reagents by Infrared Spectroscopy ....	Masao Katsuta .... 91
Primitivism In <i>The Woodlanders</i> .....	Yasuo Matsuo .... 101
<i>Four Quartets</i> : An Interpretation (2) "The Dry Salvages" and "Little Gidding" .....	Takehiko Tabuki .... 113